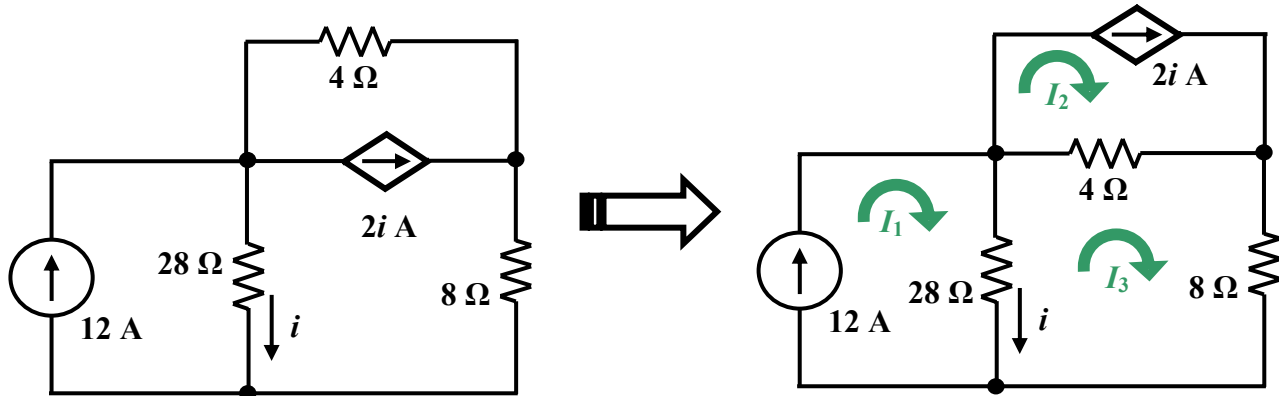


► ΘΕΜΑ 1. [15%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα προσδιορίστε το ρεύμα i .



ΛΥΣΗ: Υπάρχουν πολλοί τρόποι να βρεθεί το ρεύμα i . Το ερώτημα είναι ποιος είναι ο πιο σύντομος και κατά συνέπεια ο πιο ασφαλής (λιγότερη πιθανότητα για σφάλματα). Παρατηρώντας την παράλληλη σύνδεση της εξαρτημένης πηγής και της αντίστασης των 4Ω , ανακαλύπτουμε πως μπορούμε να ξανασχεδιάσουμε το κύκλωμα όπως φαίνεται πιο πάνω δεξιά. Τότε διαπιστώνουμε (πιο εύκολα τώρα) ότι έχουμε δυο εξωτερικούς βρόχους με προκαθορισμένο το ρεύμα τους, οπότε η καταλληλότερη μέθοδος είναι αυτή των βροχικών εντάσεων. Έτσι

$$I_1 = 12$$

$$I_2 = 2i = 2(I_1 - I_3) \quad (\text{γιατί το } I_1 \text{ είναι ομόρροπο με το } i)$$

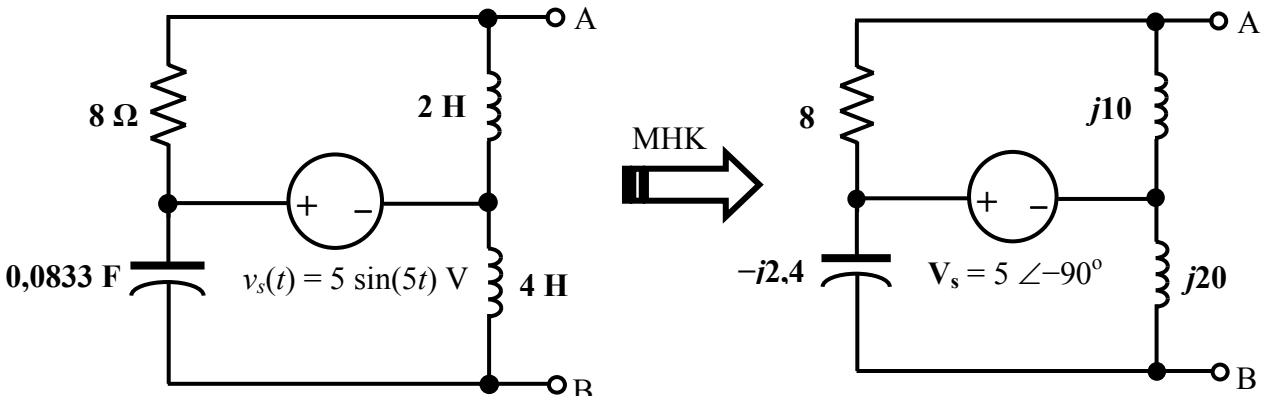
$$28(I_3 - I_1) + 4(I_3 - I_2) + 8I_3 = 0$$

Αντικαθιστώντας από την πρώτη στη δεύτερη εξίσωση και από τη δεύτερη στην τρίτη

$$48I_3 = 28 \times 12 + 8 \times 12 = 432 \Rightarrow I_3 = 9 \Rightarrow \underline{i = I_1 - I_3 = 12 - 9 = 3 \text{ A}}$$

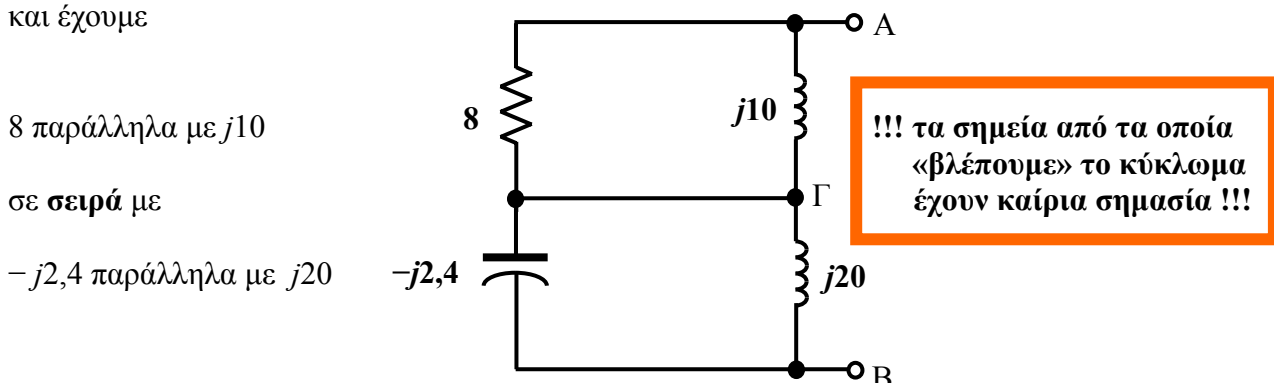
► ΘΕΜΑ 2. [20%]

Να βρεθεί το ισοδύναμο Thevenin από τους ακροδέκτες A και B του πιο κάτω κυκλώματος όταν αυτό βρίσκεται σε συνθήκες μόνιμης ημιτονοειδούς κατάστασης.



ΛΥΣΗ:

Δεδομένης της μόνιμης ημιτονοειδούς κατάστασης, η πρώτη μας δουλειά είναι να περάσουμε στο πεδίο συχνότητας. Έτσι ($\omega=5$) προκύπτει το σχήμα επάνω δεξιά (προσοχή στο ημίτονο της πηγής!!). Μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη σύνθετη αντίσταση Thevenin, οπότε εξουδετερώνουμε την πηγή και έχουμε



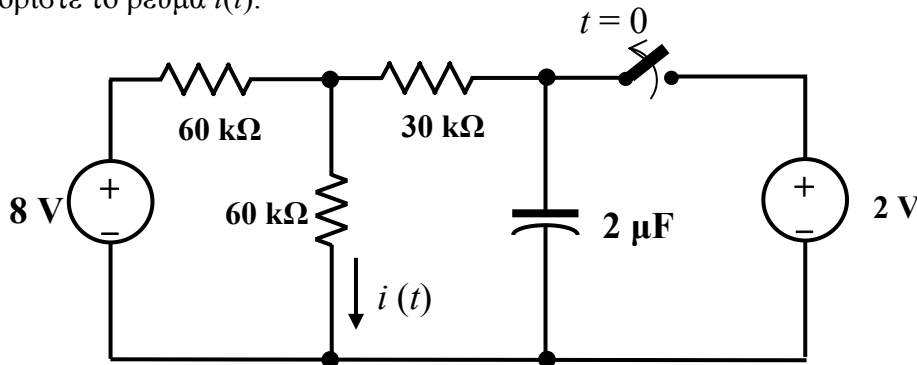
Λίγες πράξεις δίνουν ότι $Z_{Th} = 4,878 + j1,175 \Omega$.

Την τάση V_{AB} μπορούμε να βρούμε με διάφορους τρόπους, όπως π.χ. βροχικές εντάσεις (επάνω βρόχος: $0,39 \angle -141^\circ$ A, κάτω βρόχος: $0,28 \angle 0^\circ$ A). Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μεθοδικό τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε δυο διαιρέτες τάσης για τα V_{AG} και V_{GB} και να υπολογίσουμε $V_{AB} = V_{AG} + V_{GB}$.

Τελικά $V_{AB} = 2,44 + j2,62 = 3,58 \angle -47,2^\circ$ V = $3,58 \cos(5t + 47,2^\circ)$ V.

► ΘΕΜΑ 3. [35%]

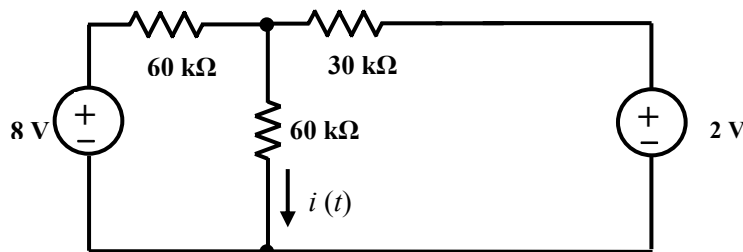
Στο πιο κάτω κύκλωμα, που λειτουργούσε για πολύ χρόνο, ο διακόπτης ανοίγει στον χρόνο $t = 0$. Προσδιορίστε το ρεύμα $i(t)$.



ΛΥΣΗ:

Δεδομένης της πρότερης κατάστασης, η πρώτη μας δουλειά είναι να διαπιστώσουμε τι συμβαίνει στο κύκλωμα για $t < 0$. Το κύκλωμα είναι (ο πυκνωτής έχει καταστεί ανοικτό κύκλωμα λόγω του συνεχούς ρεύματος των πηγών):

$t < 0$



Με κάποια μέθοδο υπολογίζουμε το ρεύμα $i(t)$. Π.χ. με κομβικές τάσεις για τον μοναδικό κόμβο

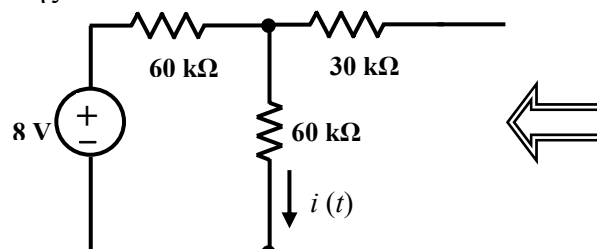
στο πάνω μέρος: $\frac{v-8}{60000} + \frac{v}{60000} + \frac{v-2}{30000} = 0$. Λύνουμε ($4v = 12$) και $v = 3$ V. Οπότε

$$i(0^-) = 0,05 \text{ mA}$$

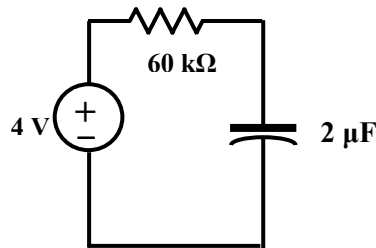
Επίσης λόγω της πηγής των 2 V ξέρουμε πως $v_C(0^-) = 2$ V.

$t > 0$

Έχουμε να κάνουμε με ένα κύκλωμα που έχει ένα μόνο στοιχείο που αποθηκεύει ενέργεια, τον πυκνωτή, άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση κυκλώματος RC. Δυστυχώς όμως στο κύκλωμα δεν υπάρχει μια μόνο αντίσταση και δεν μπορώ να εφαρμόσω κατευθείαν τη γνωστή λύση. Πρέπει να φέρω το κύκλωμά μου σε πιο απλή μορφή. Αυτό γίνεται εφαρμόζοντας το ισοδύναμο Thevenin. Έτσι, εξετάζουμε τι «βλέπει» ο πυκνωτής:



Από τον διαιρέτη τάσης βρίσκουμε αμέσως ότι θα έχουμε τη μισή τάση της πηγής ενώ η εξουδετέρωση της πηγής δίνει (και με απλή επισκόπηση ακόμα) ότι η ισοδύναμη αντίσταση είναι $60k \parallel 60k = 30k$ σε σειρά με $30k$, τελικά $60k\Omega$.



Λόγω του κυκλώματος πρώτης τάξης ισχύει ότι

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

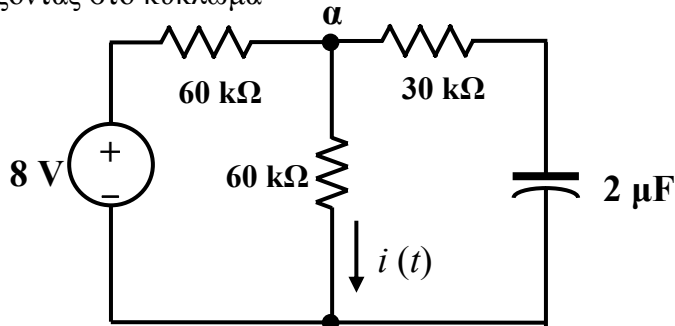
και πρέπει να προσδιορίσουμε τις ποσότητες που υπεισέρχονται:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2 \text{ V} \quad v_C(\infty) = 4 \text{ V} \quad (\text{λόγω της πηγής}) \quad \tau = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^3 = 120 \text{ ms}$$

οπότε

$$v_C(t) = 4 - 2e^{-t/120} \text{ V}, \quad t > 0 \quad \text{και ο χρόνος μετριέται σε ms.}$$

Ξαναγυρίζοντας στο κύκλωμα



βλέπουμε ότι με κομβικές τάσεις μπορούμε να γράψουμε για τον μοναδικό κόμβο α:

$$\frac{v_a - 8}{60000} + \frac{v_a}{60000} + \frac{v_a - v_C}{30000} = 0 \implies v_a - 8 + v_a + 2(v_a - 4 + 2e^{-t/120}) = 0 \implies \underline{v_a(t) = 4 - e^{-t/120} \text{ V}}$$

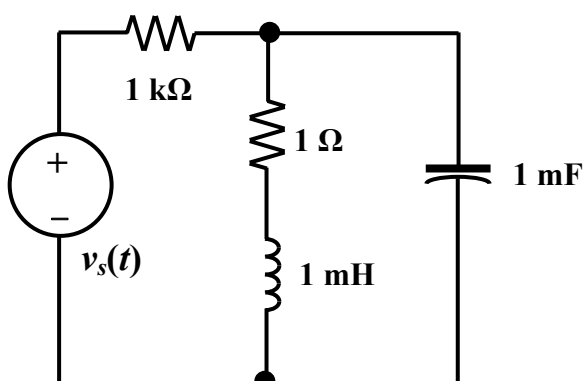
οπότε

$$i(t) = \frac{v_a(t)}{60000} = \frac{4 - e^{-t/120}}{60000} = 66,7 - 16,7e^{-t/120} \mu\text{A}, \quad t > 0, \quad t \text{ σε ms.}$$

Επαληθεύουμε ότι η τιμή του ρεύματος στη χρονική στιγμή 0 είναι αυτή που βρήκαμε προηγουμένως.

► ΘΕΜΑ 4. [25%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα RLC ο επαγωγός έχει αντικατασταθεί με ένα πιο λεπτομερές μοντέλο. Προσδιορίστε με όποια μέθοδο θέλετε τη διαφορική εξίσωση που διέπει αυτό το κύκλωμα.



ΛΥΣΗ:

Κι εδώ υπάρχουν πολλοί τρόποι να βρεθεί το ζητούμενο, ακόμα και με απλές σχέσεις που διέπουν τα στοιχεία με νόμους Kirchhoff. Βέβαια, ένας σύντομος μεθοδικός τρόπος είναι προτιμότερος.

ΛΥΣΗ Ι:

Με κομβικές τάσεις για τον μοναδικό κόμβο του κυκλώματος

$$\frac{v - v_s}{1000} + i + 0,001 \frac{dv}{dt} = 0$$

Ισχύει επίσης ότι

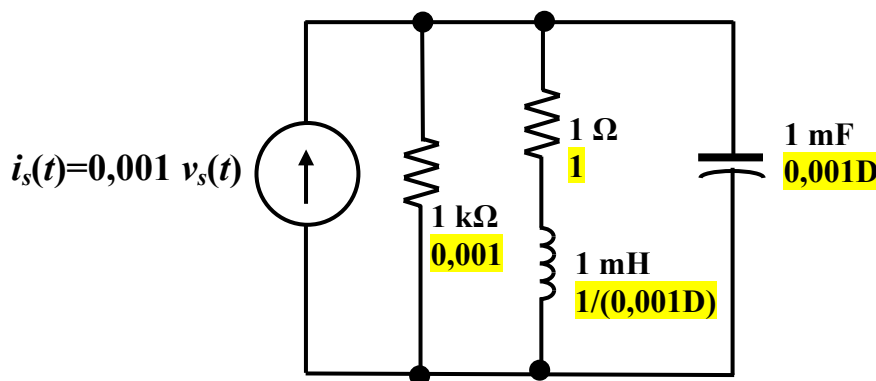
$$v = i + 0,001 \frac{di}{dt}$$

Επιλύοντας το σύστημα για v και i βρίσκουμε ότι ($v = v_C$)

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 1001 \frac{dv_C}{dt} + 1001000 v_C = 1000 v_s + \frac{dv_s}{dt}$$

ΛΥΣΗ ΙΙ:

Με απλό μετασχηματισμό πηγής παίρνω το πιο κάτω κύκλωμα



Με κίτρινο έχουν σημειωθεί οι δεκτικότητες

που λύνεται με μια μόνο εξίσωση κομβικών τάσεων:

$$-0,001 v_s + \frac{v}{1000} + \frac{1}{1 + 0,001D} v + 0,001D v = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1000}{1 + 0,001D} + 0,001D \right) v = v_s \Rightarrow$$

$$(1 + 0,001D + 1000 + 0,001D^2) v = (1 + 0,001D) v_s \Rightarrow (v = v_C)$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 1001 \frac{dv_C}{dt} + 1001000 v_C = 1000 v_s + \frac{dv_s}{dt}$$

Εφόσον έχουμε σύνδεση σε σειρά, η δεκτικότητα του κλάδου είναι το αντίστροφο του αθροίσματος των εμπεδήσεων

Διαφορικές εξισώσεις για άλλα μεγέθη είναι

Ρεύμα επαγωγού: $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 1001 \frac{di_L}{dt} + 1001000 i_L = 1000 v_s$

Ρεύμα που διαρρέει την πηγή: $\frac{d^2 i}{dt^2} + 1001 \frac{di}{dt} + 1001000 i = 0,001 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{dv_s}{dt} + 1000 v_s$