

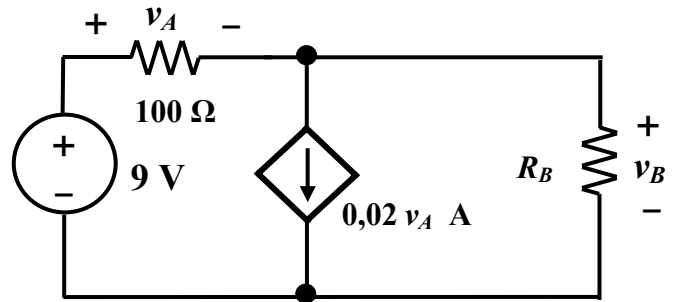
ΘΕΜΑ 1. [15%]

Στο κύκλωμα αυτό:

(Α) Προσδιορίστε την τάση v_B όταν $R_B = 200 \Omega$.

(Β) Τι συμβαίνει όταν $R_B = 100 \Omega$;

Πως εξηγείται αυτό;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

(Α) Με κομβικές τάσεις και τη μοναδική κομβική τάση $V = v_B$ έχουμε

$$\frac{v_B - 9}{100} + 0,02v_A + \frac{v_B}{R_B} = 0$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$v_A = 9 - v_B$$

αντικαθιστούμε και λύνουμε για v_B . Όταν $R_B = 200$ έχουμε $v_B = 18$ V.

(Β) Όταν $R_B = 100 \Omega$ διαπιστώνεται ότι το σύστημα είναι αδύνατο (καταλήγουμε σε κάτι σαν $9 = 0$) και το κύκλωμα κακώς ορισμένο.

Κανονικά σε μια τέτοια περίπτωση πρέπει να γίνει μια διερεύνηση για το τι ακριβώς συμβαίνει. Ένας καλός τρόπος να πραγματοποιηθεί αυτή η ανάλυση είναι να μεταβάλλουμε ελαφρά την τιμή της R_B ώστε να εξετάσουμε με ποιο τρόπο εμφανίζεται η ασυνέχεια. Έτσι, όταν η τιμή R_B πλησιάζει την τιμή 100 (και από τις δυο πλευρές) βλέπουμε ότι η τιμή v_B αυξάνει απότομα. Αυτό είναι δείγμα ότι κάτι δεν πάει καλά.

Η αιτία βέβαια είναι η ύπαρξη της εξαρτημένης πηγής που υλοποιεί ένα είδος **ανάδρασης**, κατά την οποία η λειτουργία ενός τμήματος του κυκλώματος επηρεάζει τη λειτουργία ενός άλλου τμήματος. Η επίδραση αυτή μπορεί να είναι εποικοδομητική (περίπτωση αρνητικής ανάδρασης) ή καταστροφική (περίπτωση θετικής ανάδρασης).

Ένα παράδειγμα θετικής ανάδρασης είναι ο μικροφωνισμός: όταν ο ομιλητής ή ο τραγουδιστής τοποθετήσει το μικρόφωνο μπροστά στο ηχείο/μεγάφωνο, τότε το μικρόφωνο δέχεται σήμα και από τη φωνή και από την «έξοδο» του συστήματος ενίσχυσης. Ο ενισχυτής ενισχύει και τα δυο σήματα, η στάθμη του ήχου ανεβαίνει, το σήμα εισόδου στον ενισχυτή γίνεται μεγαλύτερο, ξαναενισχύεται περισσότερο, και τελικά υπάρχει περίπτωση να καεί το μεγάφωνο (αν έχουν αντέξει τα αυτιά μας μέχρι τότε και κάποιος δεν έχει κάνει κάτι να σταματήσει το φαινόμενο).

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ**A. Με βροχικές εντάσεις**

Με δεξιόστροφα I_1 και I_2 στον αριστερό και δεξιό βρόχο, αντίστοιχα, παίρνουμε

$$-9 + 100I_1 + v_B = 0$$

$$200I_2 - v_B = 0$$

(όπου v_B η τάση στα άκρα της εξαρτημένης πηγής ρεύματος). Προσθέτοντας τις δυο σχέσεις και δεδομένου ότι

$$I_1 - I_2 = 0,02v_A$$

Θα πάρουμε ότι

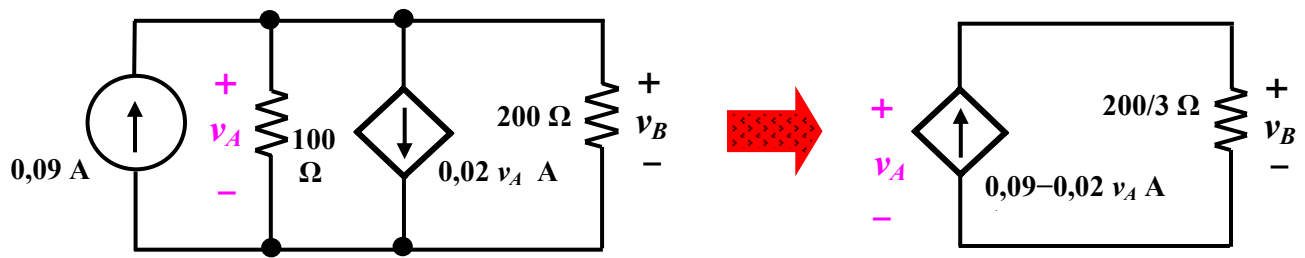
$$I_1 = \frac{-9}{100} \text{ A}$$

οπότε

$$\begin{aligned} v_B &= 200I_2 = 200(I_1 - 0,02v_A) = 200(I_1 - 0,02 \times 100I_1) \\ &= -200I_1 = -200\left(\frac{-9}{100}\right) = 18 \text{ V} \end{aligned}$$

B. Με μετασχηματισμό της ανεξάρτητης πηγής τάσης

Το κύκλωμα γίνεται



όπου: (1) η πολικότητα της τάσης v_A στο νέο κύκλωμα είναι τέτοια ώστε το ρεύμα από την πηγή να συναντά πρώτα τον θετικό πόλο της τάσης v_A όπως και προηγουμένως
και (2) η φορά της τελικής ισοδύναμης πηγής ρεύματος καθορίζεται από την πολικότητα της τάσης v_B

Στο τελευταίο αυτό κύκλωμα, η ζητούμενη τάση v_B δίνεται σαν

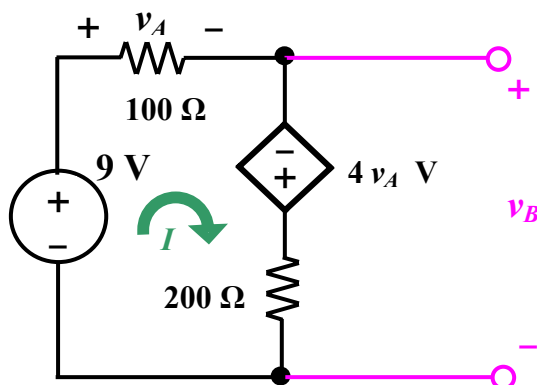
$$v_B = \frac{200}{3}(0,09 - 0,02v_A)$$

Αλλά $v_B = v_A$. Έτσι

$$v_B = 6 - \frac{4}{3}v_B \Rightarrow v_B = 18 \text{ V}$$

Γ. Με μετασχηματισμό της εξαρτημένης πηγής ρεύματος

Το κύκλωμα γίνεται



Από τον νόμο τάσεων του Kirchhoff παίρνουμε

$$-9 + v_A + 200I - 4v_A = 0$$

και επειδή

$$v_A = 100I$$

θα έχουμε

$$-9 + 100I - 400I + 200I = 0 \Rightarrow I = \frac{-9}{100} \text{ A}$$

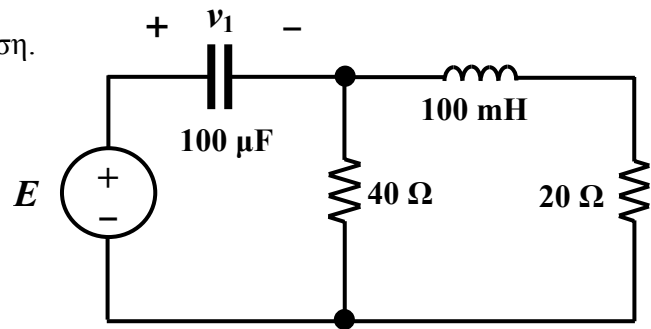
Τότε

$$v_B = -4 \times 100 \times \frac{-9}{100} + 200 \times \frac{-9}{100} = 36 - 18 = 18 \text{ V}$$

◀ **ΘΕΜΑ 2.** [15%]

Το κύκλωμα δεξιά βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση. Υπολογίστε την τάση $v_1(t)$ στα άκρα του πυκνωτή όταν

$$E(t) = 200 \cos(500t + 30^\circ) \text{ V}$$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1. Βρίσκουμε τις εμπεδήσεις:

$$\frac{1}{j \times 500 \times 100 \times 10^{-6}} = -j20 \text{ για τον πυκνωτή,}$$

$$j \times 500 \times 100 \times 10^{-3} = +j50 \text{ για τον επαγωγό}$$

2. Υπολογίζουμε τον παράλληλο συνδυασμό 40Ω με $20 + j50 \Omega$:

$$\frac{40 \times (20 + j50)}{60 + j50} = \frac{80 + j200}{6 + j5} = 24,262 + j13,114 \quad (= 27,258 \angle 28,393^\circ)$$

3. Από τον διαιρέτη τάσης υπολογίζουμε την τάση v_1 :

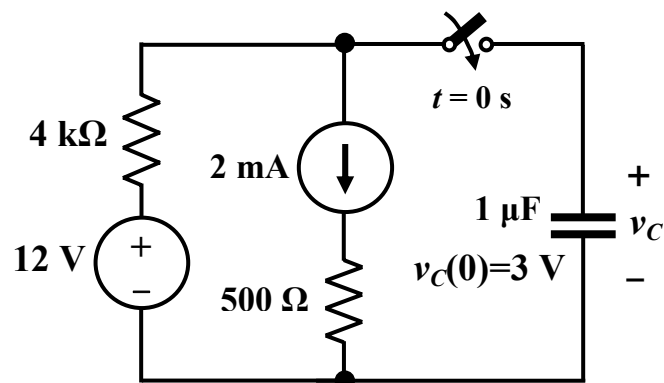
$$\begin{aligned} \frac{-j20}{24,262 + j13,114 - 20j} E &= \frac{-j20 \times 200 \angle 30^\circ}{24,262 - j6,886} = \\ &= \frac{20 \angle -90^\circ \times 200 \angle 30^\circ}{25,21 \angle -15,85^\circ} = 158,954 \angle -44,15^\circ \end{aligned}$$

4. Τελικά $v_1(t) = 158,954 \cos(500t - 44,15^\circ)$

ΣΧΟΛΙΟ: Ένα απλούστατο πρόβλημα όπου αυτό που ελέγχεται είναι η ικανότητα εκτέλεσης δυο (2) σύνθετων πράξεων με μιγαδικούς. Βέβαια, αντί για τον διαιρέτη τάσης θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει μέθοδο κομβικών τάσεων ή μέθοδο βροχικών εντάσεων με πολύ περισσότερες πράξεις, φυσικά.

◀ **ΘΕΜΑ 3.** [20%]

Το κύκλωμα στα δεξιά λειτουργούσε για πολλή ώρα. Στο χρόνο $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης. Υπολογίστε την τάση $v_C(t)$ στα άκρα του πυκνωτή για $t > 0$ όταν ο πυκνωτής έχει μια αρχική φόρτιση 3 V.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Δεν υπάρχει κάτι που επηρεάζει τη μετέπειτα συμπεριφορά όσο το κύκλωμα λειτουργεί για $t < 0$. Πρόκειται λοιπόν για κύκλωμα πρώτης τάξης και η τάση θα δίνεται από τη σχέση

$$v_C(t) = [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις άγνωστες ποσότητες εκτός από την αρχική τάση που δίνεται (3 V).

Σταθερά χρόνου: δίνεται από την αντίσταση που «βλέπει» ο πυκνωτής. Θέλουμε λοιπόν την αντίσταση του ισοδύναμου Thevenin (μόνο την αντίσταση). Ανοιχτοκυκλώνοντας την πηγή ρεύματος και βραχυκυκλώνοντας την πηγή τάσης βλέπουμε ότι ο αντιστάτης των 500Ω δεν συμμετέχει στο κύκλωμα, οπότε $\tau = R_{Th} C = 4000 \times 10^{-6} = 0,004 \text{ s}$.

Τιμή στη μόνιμη κατάσταση: Μετά από αρκετό χρόνο, ο πυκνωτής θα είναι ανοιχτοκύκλωμα, οπότε το υπόλοιπο κύκλωμα, που θα συνεχίσει να λειτουργεί, δίνει για τάση στα άκρα που «ακουμπάει» ο

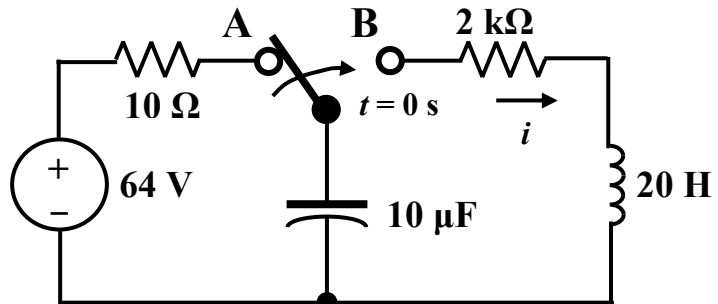
πυκνωτής ίση με $12 - 4000 \cdot 0,002 = 4 \text{ V}$ (θα μπορούσε να βρεθεί και σαν η τάση Thevenin και είναι ίση με την τάση που υπάρχει πριν κάνει επαφή ο πυκνωτής). Τελικά λοιπόν

$$v_C(t) = [3 - 4]e^{-250t} + 4 = 4 - e^{-250t} \text{ V}, t > 0.$$

Ποιοτική ανάλυση: πρόκειται για ένα κύκλωμα με σταθερές πηγές στο οποίο «προστίθεται» ένας πυκνωτής. Λόγω του ότι οι πηγές είναι σταθερές, ο πυκνωτής από κάποια στιγμή και μετά θα μπορεί να θεωρηθεί σαν ανοικτό κύκλωμα και θα είναι σαν να μην υπάρχει καθόλου. Έτσι το αρχικό κύκλωμα για $t < 0$ θα «επανεμφανιστεί». Πρόκειται λοιπόν για μια προσωρινή διατάραξη και η τάση v_C που ήταν 4 V θα κάνει ένα βύθισμα στα 3 V όταν $t = 0$ και θα επανακάμψει ασυμπτωτικά στα 4 V .

ΘΕΜΑ 4. [30%]

Το κύκλωμα στα δεξιά λειτουργούσε για πολλή ώρα. Στο χρόνο $t = 0$ ο διακόπτης περνά στιγμιαία από τη θέση Α στη θέση Β. Υπολογίστε το ρεύμα $i(t)$ για $t > 0$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Από τις συνθήκες που περιγράφονται, για $t < 0$ ο πυκνωτής θα έχει φορτιστεί στα $v_C(0^-) = 64 \text{ V}$, ενώ $i(0^-) = 0 \text{ A}$.

Για $t > 0$ το κύκλωμα γίνεται ένα σειριακό RLC. Έτσι για το ρεύμα $i(t)$ παίρνουμε (π.χ. από τελεστές εμπέδησης και νόμο τάσεων Kirchhoff)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

με αρχικές συνθήκες $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 64$ και $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι

$$-\alpha \pm j\omega_d = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 50 \pm \sqrt{5000 - 2500} = 50 \pm j50$$

και η μορφή της λύσης είναι

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

Για $t = 0$, προκύπτει από το $i(0^+) = 0$ ότι $A = 0$. Παραγωγίζοντας το $i(t)$ παίρνουμε

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{v_L}{L} \Big|_{t=0} = \frac{v_R + v_C}{L} \Big|_{t=0} = \frac{R \cdot 0 + 64}{20} = 3,2 = B\alpha e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \Big|_{t=0} = 50B$$

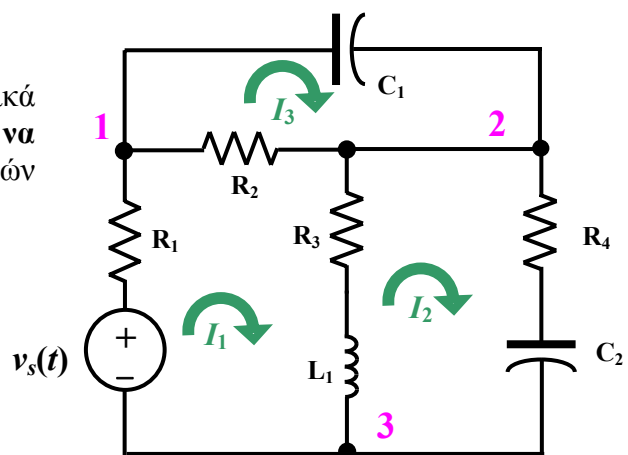
Οπότε $B = 0,064$ και τελικά $i(t) = 0,064e^{-50t} \sin 50t \text{ A}$.

ΘΕΜΑ 5. [20%]

Για το κύκλωμα (στο οποίο δεν υπάρχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια) απλά καταστρώστε (χωρίς να λύσετε) σε μορφή πίνακα (1) τις εξισώσεις κομβικών τάσεων και (2) τις εξισώσεις βροχικών εντάσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Βροχικές εντάσεις:



$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + L_1 D & -R_3 - L_1 D & -R_2 \\ -R_3 - L_1 D & R_4 + R_3 + L_1 D + 1/C_2 D & 0 \\ -R_2 & 0 & R_2 + 1/C_1 D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Μετά τον μετασχηματισμό της πηγής τάσης σε πηγή ρεύματος:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_1 D & -\frac{1}{R_2} - C_1 D \\ -\frac{1}{R_2} - C_1 D & \frac{1}{R_2} + C_1 D + \frac{1}{R_3 + L_1 D} + \frac{1}{R_4 + \frac{1}{C_2 D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_s}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$