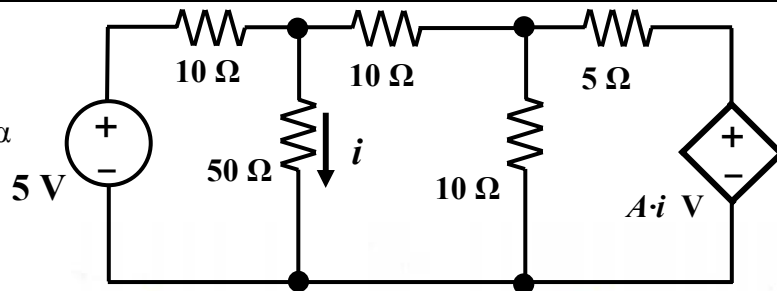
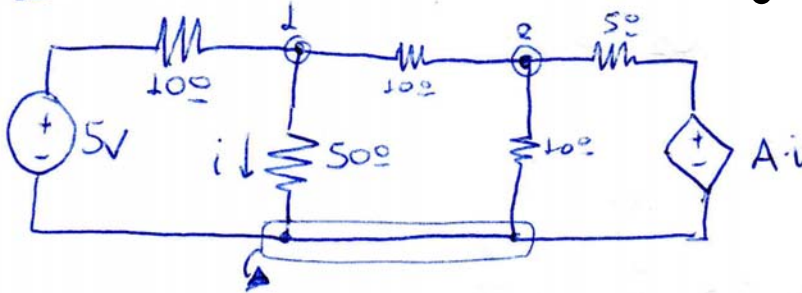


Οι λύσεις δίνονται με την ευγενική χορηγία των κκ. Π.-Π. Ζουμπούλογλου και Γ. Χριστουλάκη.

ΘΕΜΑ 1. [15%]

Στο κύκλωμα δεξιά, να βρεθεί η τιμή του συντελεστή A έτσι ώστε το ρεύμα i να είναι ίσο με 5 A.

ΘΕΜΑ 1

Καθβίκες Τάσεις:

Καθβος 1:

$$\frac{V_1 - 5}{10} + i + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0 \quad (1)$$

Καθβος 2:

$$\frac{V_2 - A i}{5} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_1}{10} = 0 \quad (2)$$

$$i = 5$$

$$(1) \Rightarrow V_1 - 5 + 10 \cdot 5 + V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow 2V_1 + 45 = V_2$$

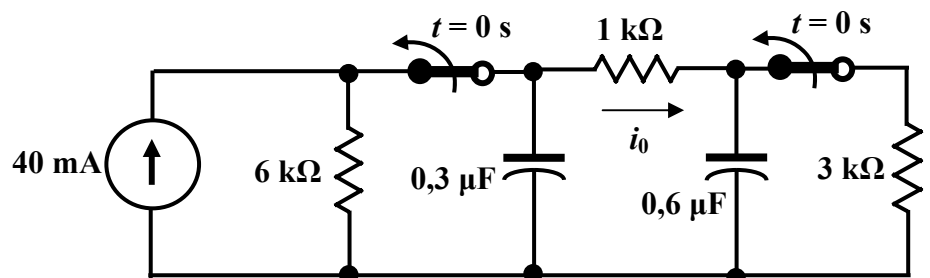
$$(2) \Rightarrow \frac{2V_1 + 45 - 5A}{5} + \frac{2V_1 + 45}{10} + \frac{2V_1 + 45 - V_1}{10} = 0 \Rightarrow 4V_1 + 90 - 10A + 2V_1 + 45 + V_1 + 45 = 0$$

Εκκατε επιγων για την $R = 50\Omega$: $V_1 = i \cdot R = 250V$

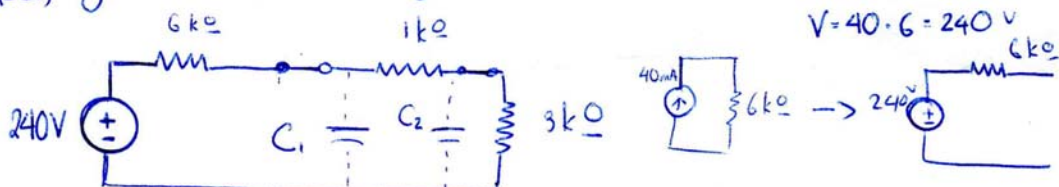
$$A \Rightarrow 7V_1 - 10A + 180 = 0 \Rightarrow 180 = 7 \cdot 250 - 10A \Rightarrow A = 193$$

ΘΕΜΑ 2. [20%]

Στο πιο κάτω κύκλωμα βρείτε το ρεύμα $i_0(t)$ για $t \geq 0$ (οι διακόπτες είναι απόλυτα συγχρονισμένοι και ανοίγουν στο $t = 0$):



Θεωρώντας ότι το κύκλωμα έχει παραμείνει σε αυτή την κατάσταση για αρκετή ώρα, για $t < 0$ θα έχουμε:



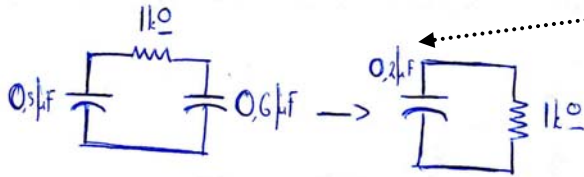
αφού οι πυκνωτές ισοδυναμούν με ανοικτούς κύκλους

$$\text{Επομένως: } I = \frac{240V}{10k\Omega} = 24mA$$

$$V_{C1}(0^-) = V_{C1}(0^+) = 240 - 24 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^3 = 96V$$

$$V_{C2}(0^-) = V_{C2}(0^+) = 96 - 24 = 72V$$

Όσα στην χρονική στιγμή $t=0$ σε κύκλωμα θα είναι σε παρακάτω



$$C_{ισοδ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Η κατάσταση αμέσως μετά το πεικνωτή, σε ένα κύκλωμα RC, μπορεί να βρεθεί από την παρακάτω σχέση:

$$V_c(t) = V_c(\infty) + [V_c(0') - V_c(\infty)] e^{-t/RC}$$

όπου στην περίπτωση μας $V_c(\infty) = 0$, και $RC = 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} = 0,2 \cdot 10^{-3}$ s. Αν αρχική φόρτιση του πεικνωτή $0,2 \mu F$ θεωρήσουμε ως άθροισμα των φορτίσεων των δύο προηγούμενων πεικνωτών, δηλαδή

$$V_c(0') = 96 - 72 = 24 V.$$

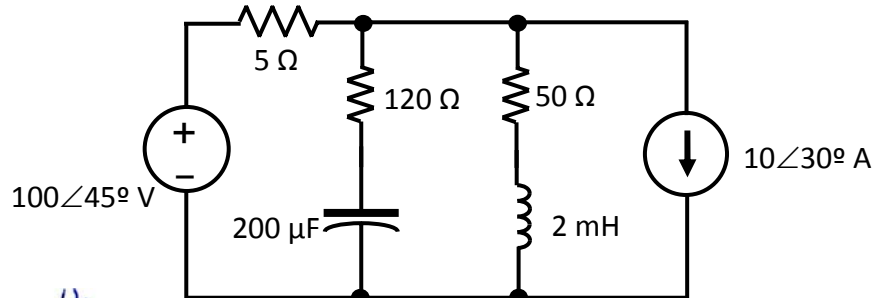
Άρα η κατάσταση αμέσως μετά το πεικνωτή είναι $V_c(t) = 24 e^{-5000t}$.

Επομένως το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση είναι

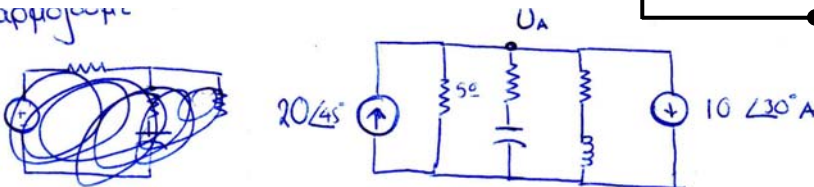
$$i_o(t) = \frac{V_c(t)}{R} = 24 \cdot 10^{-3} e^{-5000t} A$$

ΘΕΜΑ 3. [25%]

Το κύκλωμα στα δεξιά βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση και οι πηγές είναι ημιτονοειδείς με συχνότητα $400/\pi$ Hz. Βρείτε την τάση $v(t)$ στα άκρα της πηγής ρεύματος.



Λεγόμενα



$$I \frac{U_A}{5} + \frac{U_A}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{U_A}{R_2 + j\omega L} = 20 \angle 45^\circ - 10 \angle 30^\circ$$

$$\frac{U_A}{5} + \frac{U_A}{120 - j6,25} + \frac{U_A}{50 + j1,6} = 14,1 - j14,1 - 8,66 - j5$$

$$\frac{U_A}{5} + \frac{U_A}{120,1 \angle -2,98} + \frac{U_A}{50 \angle 1,83} = 5,44 + j9,1$$

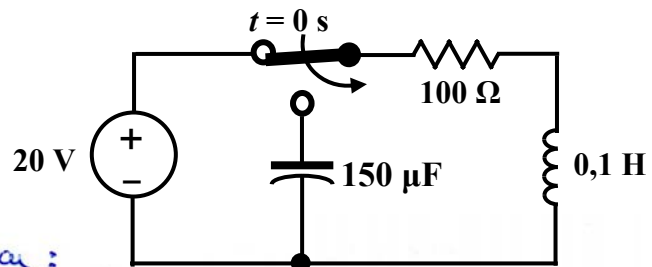
$$0,2 U_A + 8,3 \cdot 10^{-3} \angle 2,98 U_A + 0,02 \angle 1,83 U_A = 5,44 + j9,1$$

$$U_A (0,2 + 8,3 \cdot 10^{-3} + j4,31 \cdot 10^{-3} + 0,02 + j0,638 \cdot 10^{-3}) = 10,6 \angle 59,1$$

$$U_A = \frac{10,6 \angle 59,1}{0,228 \angle 0} = 46 \angle 59,1 V$$

ΘΕΜΑ 4. [20%]

Το κύκλωμα στα δεξιά λειτουργεί για πολύ χρόνο. Στο $t = 0$ ο διακόπτης αλλάζει θέση. Προσδιορίστε το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή για κάθε χρόνο t .



Οι αρχικές συνθήκες του κυκλώματος είναι :

$$V_C(0^+) = V_C(0^-) = 0V$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{20}{100} = 0,2A$$

Η διαφορική εξίσωση που διέπει το κύκλωμα είναι :

$$V_C + V_R + V_L = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} \int i(t) dt + i(t)R + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$L \frac{di^2}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0}$$

Το χαρακτηριστικό πομπόνημο της εξίσωσης είναι :

$$s^2 + 1000s + 66 \cdot 10^3 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-1000 \pm \sqrt{10^6 - 4 \cdot 66 \cdot 10^3}}{2}$$

Για την ακρίβεια 66.666,67

$$= \frac{-1000 \pm \sqrt{10^6 - 0,264 \cdot 10^6}}{2} = \frac{-1000 \pm 85,47}{2}$$

Για την ακρίβεια -71,825

$$\begin{matrix} -71,5 \\ -928,5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -71,825 \\ -928,1744 \end{matrix}$$

Άρα η λύση θα είναι της μορφής

$$i(t) = A_1 e^{-71,5t} + A_2 e^{-928,5t}$$

Την χρονική στιγμή $t=0^+$ η κατάσταση είναι στα άκρα του πηνίου είναι $V_L = I \cdot R = 0,2 \cdot 100 = 20V$ λόγω της παλαιάς κατάστασης που δημιουργείται πάνω στην αντίσταση 100Ω εξαιτίας του ρεύματος του πηνίου. Άρα:

$$V_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{20}{0,1} = 200 A/s$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } i(0) &= A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0,2 \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} &= -71,5 A_1 + -928,5 A_2 = -200 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} A_1 &= 0,016 \\ A_2 &= 0,216 \end{aligned} \right\}$$

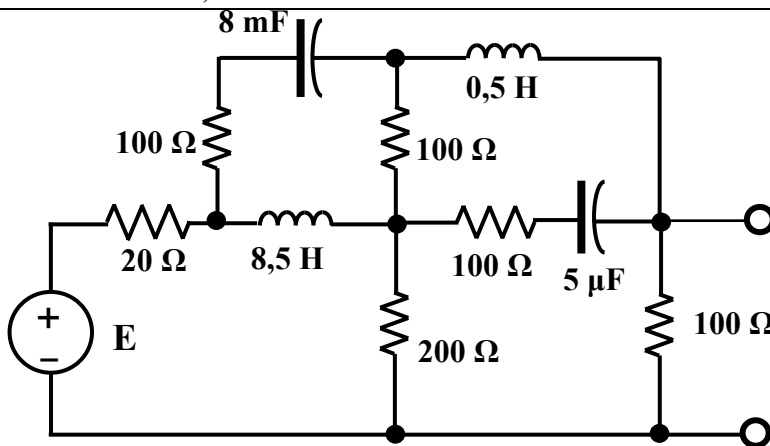
$$\boxed{i(t) = -0,016 e^{-71,5t} + 0,216 e^{-928,5t}}$$

και του ΝΤΚ στον βρόχο

ΘΕΜΑ 5. [20%]

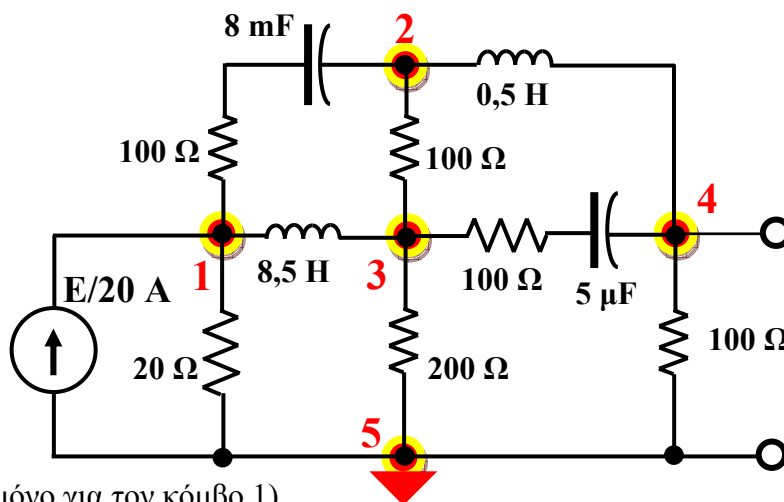
Για το κύκλωμα στα δεξιά:

- (1) Καταστρώστε σε μορφή γραμμικού συστήματος τις εξισώσεις κομβικών τάσεων (υποθέστε ότι δεν υπάρχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια).
- (2) Καταστρώστε σε μορφή γραμμικού συστήματος τις εξισώσεις βροχικών εντάσεων όταν το κύκλωμα είναι σε μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση (υποθέστε ότι $E = A\angle\varphi$ V με γωνιακή συχνότητα 10 rad/s).
- (3) Υποθέτοντας ότι $E = 10$ V και ότι το κύκλωμα λειτουργεί επί πολύ χρόνο βρείτε τις τελικές τιμές των τάσεων των πυκνωτών και των ρευμάτων των επαγωγών.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

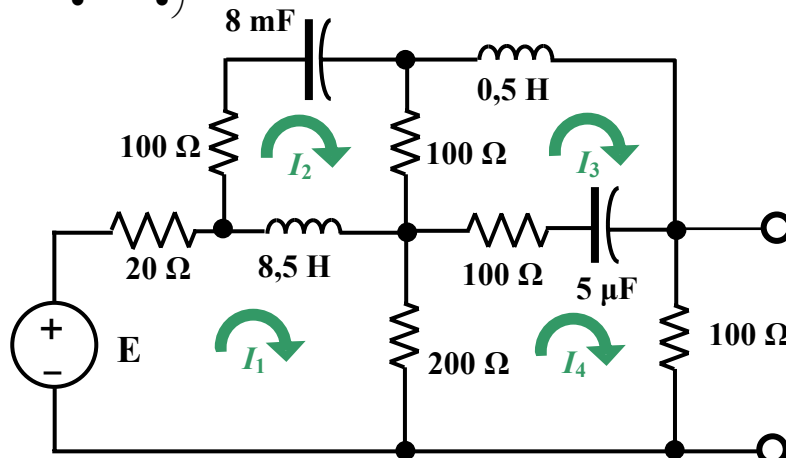
1. Για τις κομβικές τάσεις, και αφού μετατρέψουμε την πηγή τάσης σε πηγή ρεύματος, υπάρχουν 5 βασικοί κόμβοι και διαλέγουμε τον 5 (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) για κόμβο αναφοράς.



οπότε θα έχουμε (γράφουμε μόνο για τον κόμβο 1)

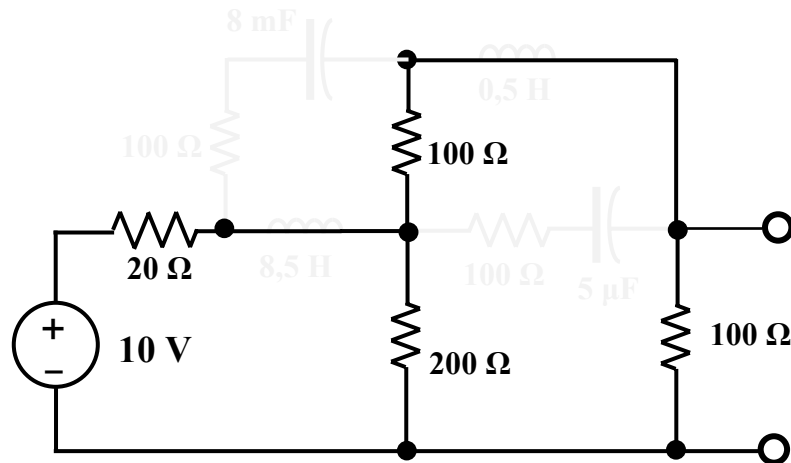
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{8,5D} + \frac{1}{100 + \frac{1}{8 \times 10^{-3}D}} & -\frac{1}{100 + \frac{1}{8 \times 10^{-3}D}} & -\frac{1}{8,5D} & 0 \\ -\frac{1}{100 + \frac{1}{8 \times 10^{-3}D}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{8,5D} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/20 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

2. Για τις βροχικές εντάσεις είμαστε σε ΜΗΚ με $\omega = 10$ rad/s οπότε με τα ενδεικνυόμενα βροχικά ρεύματα θα πάρουμε (δείχνουμε μόνο τον βρόχο 3):

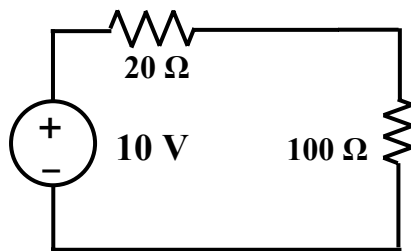


$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & -100 & \bullet \\ 0 & -100 & j5 - \frac{j}{5 \times 10^{-5}} + 100 + 100 & -\left(100 - \frac{j}{5 \times 10^{-5}}\right) \\ \bullet & \bullet & -\left(100 - \frac{j}{5 \times 10^{-5}}\right) & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \bullet \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \end{pmatrix}$$

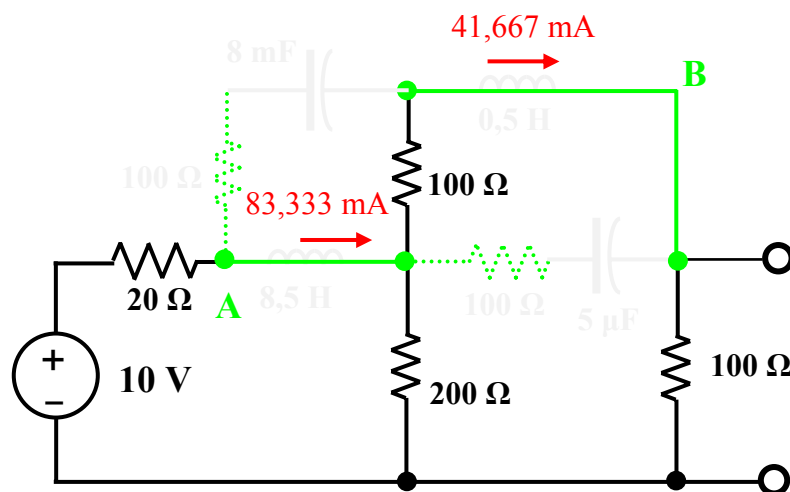
3. Το κύκλωμα όταν $E = 10 \text{ V}$ και $t = \infty$ (πυκνωτές ανοιχτοκυκλωμένοι, επαγωγείς βραχυκυκλωμένοι) γίνεται:



και τελικά:



οπότε ολικό ρεύμα $10/120 = 83,333 \text{ mA}$ που διασπάται σε δυο ίσα ρεύματα των $41,667 \text{ mA}$ έκαστο στους δυο κλάδους με τις αντιστάσεις των 200Ω . Οπότε και οι ζητούμενες τελικές τιμές των ρευμάτων των επαγωγών είναι όπως φαίνονται στο τελευταίο σχήμα. Για τις τάσεις των πυκνωτών θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψη μας ότι οι «συννοδοί» αντιστάτες δεν διαρρέονται από ρεύμα, άρα έχουν μηδενική πτώση τάσης, οπότε οι πυκνωτές «βλέπουν» τελικά την ίδια και οι δύο, όπως προκύπτει, τάση στα σημεία A και B.



Η τάση αυτή είναι ίση με την τάση στα άκρα της επάνω αντίστασης των 100Ω , που είναι $100 \times 41,667 \times 10^{-3} = 4,167 \text{ V}$.