

ΚΥΚΛΩΜΑ RC ΜΕ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΕΙΣΟΔΟ

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Η είσοδος του κυκλώματος είναι τώρα

$$i_s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$\nwarrow$ ΠΛΑΤΟΣ $\uparrow$ ΓΩΝΙΑΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ $\swarrow$ ΦΑΣΗ

Η διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της τάσης $v(t)$ στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R} v(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \forall t \geq 0$$

και η λύση της θα δοθεί σαν

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

όπου $v_h(t)$ είναι η λύση της ομογενούς (δεξιό μέλος ίσο με μηδέν) και $v_p(t)$ είναι μια μερική λύση. Η μερική λύση θα είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση ίδιας συχνότητας αλλά με διαφορετικές τις άλλες παραμέτρους:

$$v_p(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα A_2 και φ_2 .

Για να το επιτύχουμε αυτό, αντικαθιστούμε τη μερική λύση στη διαφορική εξίσωση κι έχουμε

$$-CA_2\omega \sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{1}{R} A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

Από γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους¹ η Εξ. (1) γράφεται

$$\begin{aligned} & -CA_2\omega (\sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2) + \frac{1}{R} A_2 (\cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2) \\ & = A_1 (\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1) \end{aligned}$$

ή

$$\sin \omega t \left(-CA_2\omega \cos \varphi_2 - \frac{A_2}{R} \sin \varphi_2 + A_1 \sin \varphi_1 \right) + \cos \omega t \left(-CA_2\omega \sin \varphi_2 + \frac{A_2}{R} \cos \varphi_2 - A_1 \cos \varphi_1 \right) = 0$$

¹ $\sin(a \sim b) = \sin a \cos b \sim \sin b \cos a, \quad \cos(a \sim b) = \cos a \cos b \mathbb{R} \sin a \sin b$

που για να ισχύει πρέπει και οι δυο όροι να είναι ίσοι με μηδέν, οπότε

$$CA_2\omega \cos \varphi_2 + \frac{A_2}{R} \sin \varphi_2 = A_1 \sin \varphi_1$$

$$-CA_2\omega \sin \varphi_2 + \frac{A_2}{R} \cos \varphi_2 = A_1 \cos \varphi_1$$

που γίνεται

$$RCA_2\omega \cos \varphi_2 + A_2 \sin \varphi_2 = RA_1 \sin \varphi_1$$

$$-RCA_2\omega \sin \varphi_2 + A_2 \cos \varphi_2 = RA_1 \cos \varphi_1$$

ή

$$RCA_2\omega + A_2 \tan \varphi_2 = \frac{RA_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2} \quad (2)$$

$$-RCA_2\omega \tan \varphi_2 + A_2 = \frac{RA_1 \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \quad (3)$$

Διαιρώντας αυτές τις δυο σχέσεις παίρνουμε

$$RC\omega + \tan \varphi_2 = -RC\omega \tan \varphi_1 \tan \varphi_2 + \tan \varphi_1$$

οπότε

$$\tan \varphi_2 = \frac{-RC\omega + \tan \varphi_1}{RC\omega \tan \varphi_1 + 1} \Rightarrow \varphi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{-RC\omega + \tan \varphi_1}{RC\omega \tan \varphi_1 + 1} \right)$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση $\tan(a \pm b) = (\tan a \pm \tan b) / (1 \mp \tan a \tan b)$

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_1 - \tan^{-1}(RC\omega)}$$

Συνεχίζοντας, αντικαθιστώ στην Εξ. (2) και παίρνω

$$A_2 \left(\frac{\tan \varphi_1 - RC\omega}{1 + RC\omega \tan \varphi_1} + RC\omega \right) = \frac{RA_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

ή (χρησιμοποιώντας τον τύπο για συνημίτονο διαφοράς γωνιών)

$$A_2 \left(\frac{\tan \varphi_1 (1 + R^2 C^2 \omega^2)}{1 + RC\omega \tan \varphi_1} \right) = \frac{RA_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \cos(\tan^{-1}(RC\omega)) + \sin \varphi_1 \sin(\tan^{-1}(RC\omega))}$$

οπότε

$$A_2 \left(\frac{\tan \varphi_1 (1 + R^2 C^2 \omega^2)}{1 + RC\omega \tan \varphi_1} \right) = \frac{RA_1 \tan \varphi_1}{\cos(\tan^{-1}(RC\omega)) + \tan \varphi_1 \sin(\tan^{-1}(RC\omega))}$$

Στο σημείο αυτό, για να απλοποιήσω την τελευταία σχέση, θεωρώ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ωC και $1/R$. Τότε θα πάρω για τα μεγέθη που εμπλέκονται πιο πάνω

$$A_2 \left(\frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{1 + RC\omega \tan \varphi_1} \right) = \frac{RA_1}{\frac{1/R}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + C^2 \omega^2}} + \tan \varphi_1 \frac{C\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + C^2 \omega^2}}} = \frac{RA_1 \sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}{1 + RC\omega \tan \varphi_1}$$

που δίνει

$$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + C^2 \omega^2}}$$

Άρα τελικά η λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$v(t) = K_1 e^{-\frac{1}{RC}t} + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

και για $t = 0$ παίρνουμε $v(0) = K_1 + A_2 \cos \varphi_2 = 0 \Rightarrow K_1 = -A_2 \cos \varphi_2$ οπότε τελικά

$$v(t) = -A_2 \cos \varphi_2 e^{-\frac{1}{RC}t} + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad t \geq 0$$

Σχηματικά, για $R = C = 1, A_1 = 1, \varphi_1 = 1, \omega = 1$, παίρνουμε

