

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

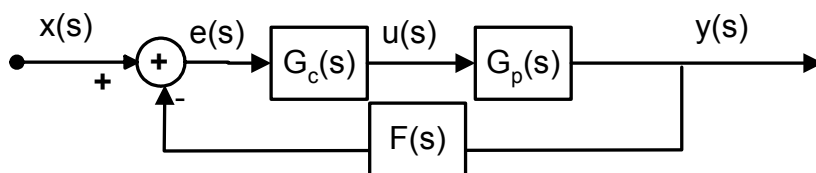
Για την βελτίωση των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου χρησιμοποιούμε τους λεγόμενους ελεγκτές ή αντισταθμητές. Οι ελεγκτές ή αντισταθμητές είναι διάφορες διατάξεις (με προκαθορισμένη δομή) που τοποθετούμε στον απευθείας κλάδο (ελεγκτές σειράς) ή στον κλάδο ανάδρασης (ελεγκτές ανάδρασης) του κλειστού συστήματος. Ο πιο διαδεδομένος τύπος ελεγκτού είναι ο ελεγκτής σειράς, αν και σε μερικά συστήματα (έλεγχος κινητήρων κ.λ.π.) χρησιμοποιείται κατ' ανάγκη ο ελεγκτής ανάδρασης και ειδικά ο ελεγκτής ταχύτητας. Ο σχεδιασμός του ελεγκτή έχει σκοπό να τροποποιήσει την συνάρτηση ανοικτού βρόχου $G(s)F(s)$ ώστε το κλειστό σύστημα να έχει επιθυμητά χαρακτηριστικά. Αφού κατ' αυτόν τον τρόπο τροποποιείται η $G(s)F(s)$ ουσιαστικά τροποποιείται η ποσότητα $1+G(s)F(s)$ που καθορίζει τους πόλους του κλειστού συστήματος. Με λίγα λόγια ο σχεδιασμός του ελεγκτή έχει σκοπό να μετακινήσει τους πόλους του κλειστού συστήματος σε επιθυμητές θέσεις.

Για τον σχεδιασμό ελεγκτών σειράς χρησιμοποιούμε τυποποιημένες διατάξεις που ανάλογα με την μορφή τους είναι ο ελεγκτής τριών όρων, ο αντισταθμητής προήγησης φάσης, ο αντισταθμητής προήγησης φάσης και ο αντισταθμητής προήγησης-καθυστερήσης φάσης

Ελεγκτής τριών όρων

Ο ελεγκτής τριών όρων είναι ουσιαστικά ένας αντισταθμητής σειράς αφού επεμβαίνει στον απ' ευθείας κλάδο του κλειστού συστήματος και ρυθμίζει το σήμα $u(s)$ που οδηγεί τον ενεργοποιητή σε ένα σύστημα λαμβάνοντας υπ' όψη την απόκλιση(σφάλμα) $e(s)$ της εισόδου από την έξοδο. Υπάρχουν πολλές μορφές υλοποίησης ενός τέτοιου ελεγκτή, οι πιο διαδεδομένες είναι οι παρακάτω.

Γενικά κάθε κλειστό σύστημα με ελεγκτή σειράς έχει την παρακάτω δομή.



Η συνάρτηση μεταφοράς της υπό έλεγχο διαδικασίας είναι $G_p(s)$, η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή τριών όρων είναι η $G_c(s)$.

Είναι γνωστό ότι ισχύει

$$y(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p F} x(s) = H_y(s) x(s)$$

$$e(s) = \frac{1}{1 + G_c G_p F} x(s) = H_e(s) x(s), \quad u(s) = \frac{G_p}{1 + G_c G_p F} x(s) = H_u(s) x(s)$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή τριών όρων έχουμε ότι

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p \left[1 + \frac{1}{r_i s} + r_d s \right]$$

όπου οι διάφορες σταθερές ορίζονται σαν

k_p = Σταθερά δράσης ανάλογου ελέγχου, έχει σχέση με την απολαβή του ανοικτού βρόχου.

k_i = Σταθερά δράσης ελέγχου ολοκληρώματος, έχει σχέση με την κλίση που δημιουργεί η ολοκλήρωση.

k_d = Σταθερά δράσης ελέγχου παραγώγου

r_i = Χρόνος επαναφοράς (reset time) σε mins ή secs

r_d = Χρόνος ρυθμού (rate time) σε mins ή secs

Οι πιο διαδεδομένες μορφές ενός ελεγκτού τριών όρων είναι

- $G_c(s) = k_p$ οπότε έχουμε τον ανάλογο έλεγχο ή απλά I (Proportional) Ελεγκτή

- $G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p \left[1 + \frac{1}{r_i s} \right]$ οπότε έχουμε τον ανάλογο έλεγχο και έλεγχο ολοκληρώματος ή απλά P.I Ελεγκτή
- $G_c(s) = k_p + k_d s = k_p [1 + r_d s]$ οπότε έχουμε τον ανάλογο έλεγχο και έλεγχο παραγώγου ή απλά P.D Ελεγκτή
- $G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p \left[1 + \frac{1}{r_i s} + r_d s \right]$ οπότε έχουμε τον ανάλογο έλεγχο + έλεγχο ολοκληρώματος + έλεγχο παραγώγου ή απλά P.I.D Ελεγκτή ή ελεγκτή τριών όρων.

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την παραπάνω δομή είναι λόγω των ιδιοτήτων που προσφέρει ο κάθε όρος.

Ανάλογος έλεγχος k_p Ρυθμίζει το μόνιμο σφάλμα και τείνει να το μηδενίσει αλλά ποτέ δεν το μηδενίζει παραμένει ένα μόνιμο σφάλμα ανάλογο με τον τύπο του συστήματος. Πιθανόν να μην μπορούμε να επιτύχουμε συγκεκριμένα όρια για το σφάλμα αφού δεν μπορούμε να αυξήσουμε το k_p πάνω από κάποιο όριο και συγκεκριμένα την κρίσιμη απολαβή.

- Αν το k_p αυξάνει έχουμε αύξηση των ταλαντώσεων και το σύστημα σβήνει πιο αργά αφού χειροτερεύει η μεταβατική συμπεριφορά.
- Αν το k_p αυξάνει έχουμε αύξηση στη φυσική συχνότητα ω_n του συστήματος και μείωση του συντελεστή απόσβεσης ζ .
- Συνήθως χρησιμοποιείται και ο όρος ανάλογη ζώνη $PB\% = 100/k_p$

Έλεγχος ολοκληρώματος k_i/s Αυξάνει τον τύπο του συστήματος με συνέπεια να μηδενίσει το μόνιμο σφάλμα, όμως καθώς αυξάνεται το k_i μετακινούνται οι επικρατούντες πόλοι επί του Γεωμετρικού τόπου και συνήθως πλησιάζουν τον φανταστικό άξονα με συνέπεια να αυξάνει η φυσική συχνότητα με απόσβεση του συστήματος και να δημιουργούνται ταλαντώσεις. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μεταβάλλεται προς το χειρότερο η μεταβατική συμπεριφορά.

- r_i είναι ο χρόνος που απαιτείται ο όρος ολοκλήρωσης να γίνει ίσος με τον ανάλογο έλεγχο για σταθερό σφάλμα.
- Η δράση ολοκληρώματος καθυστερεί τον ανάλογο καθυστερεί τον ανάλογο έλεγχο κατά την ποσότητα r_i
- Η χρήση του ελέγχου αυξάνει το αποδεκτό k_p
- Το $k_i = 1/r_i$ εκφράζει επαναλήψεις σε mins ή secs
- Αν το r_i ελαττωθεί πάρα πολύ τότε η ημιτονοειδής έξοδος τείνει να κάνει ταλαντώσεις με συχνότητα μικρότερη της κρίσιμης συχνότητας.
- Ο όρος του ολοκληρώματος λόγω της εξασθένησης που εισάγει έχει σαν αποτέλεσμα να μειώνεται η φυσική συχνότητα με απόσβεση του συστήματος, οπότε το σύστημα παρουσιάζει μεγάλη υπερύψωση με αποτέλεσμα να αυξάνει ο αριθμός των ταλαντώσεων και να χειροτερεύει η μεταβατική συμπεριφορά.

Έλεγχος παραγώγου $k_d s$ βελτιώνει τη μεταβατική συμπεριφορά, αφού απομακρύνει τους επικρατούντες πόλους από τον φανταστικό άξονα και χειροτερεύει την μόνιμη συμπεριφορά

- Η δράση της παραγώγου ενισχύει το θόρυβο και γιαυτό βάζουμε φίλτρο και ο όρος της παραγώγου γίνεται $\frac{k_d s}{1 + as}$ με $a \approx 0.2$.
- Ο έλεγχος παραγώγου βοηθάει στις αργές διαδικασίες αφού δρα προβλεπτικά στο σφάλμα και δίνει σήμα στον ενεργοποιητή για βελτίωση της μεταβατικής συμπεριφοράς.
- Το r_d είναι ο απαιτούμενος χρόνος που χρειάζεται ώστε η συνεισφορά του όρου της παραγώγου να γίνει ίση με τη συνεισφορά του αναλόγου ελέγχου όταν έχουμε είσοδο ράμπας.
- Η δράση της παραγώγου προκαλεί προήγηση του αναλόγου ελέγχου κατά την ποσότητα r_d .
- Αν δεν υπάρχει θόρυβος η δράση της παραγώγου μειώνει το k_p .
- Η δράση του ελέγχου παραγώγισης μειώνει την μεγάλη υπερύψωση και το σύστημα ανταποκρίνεται πιο γρήγορα.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ P.I.D ΕΛΕΓΚΤΩΝ

Οι μέθοδοι υπολογισμού των παραμέτρων ενός ελεγκτού τριών όρων είναι οι εμπειρικές μέθοδοι και οι υπολογιστικές μέθοδοι. Στις εμπειρικές μεθόδους υπολογίζουμε τις παραμέτρους έχοντας την βηματική απόκριση τους συστήματος ενώ τις περισσότερες φορές είναι άγνωστοι οι επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς του κλειστού συστήματος.

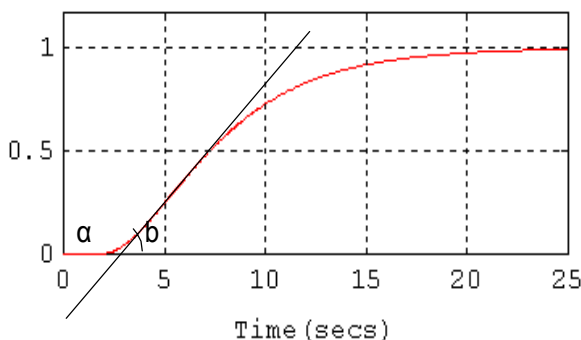
Ο σχεδιασμός του ελεγκτή γίνεται με την επιθυμία να έχουμε ικανοποιητική υπερύψωση, σχετικά ταχεία απόκριση και μικρό μόνιμο σφάλμα.

1. ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΤΑ ZIGLER-NICHOLS

Αν η βηματική απόκριση παρουσιάζει κάποια χρονική καθυστέρηση και δεν παρουσιάζονται αποσβενύμενες ταλαντώσεις στην έξοδο τότε έχουμε

- Για ανάλογο έλεγχο βάζουμε $k_p=1/ab$
- Για ανάλογο-ολοκληρώματος έλεγχο βάζουμε $k_p=0,9/ab$, $r_i=3,3a$
- Για ανάλογο-ολοκληρώματος-παραγώγου έλεγχο βάζουμε $k_p=1,2/ab$, $r_i=2a$, $r_d=0.5a$

Με a την εκτιμώμενη καθαρή χρονική καθυστέρηση και b τη μέγιστη κλίση της εφαπτομένης που μπορεί να χαραχθεί στη μοναδιαία απόκριση, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Συνήθως η μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιείται για την περίπτωση που δεν έχουμε υπερύψωση πάνω από 20%.



Αν η βηματική απόκριση δεν παρουσιάζει κάποια χρονική καθυστέρηση και παρουσιάζονται αποσβενύμενες ταλαντώσεις στην έξοδο τότε έχουμε

- Για ανάλογο έλεγχο βάζουμε $k_p=0,5k_c$.
- Για ανάλογο-ολοκληρώματος έλεγχο βάζουμε $k_p=0,45k_c$, $r_i=0,83k_c$.
- Για ανάλογο-ολοκληρώματος-παραγώγου έλεγχο βάζουμε $k_p=0,6k_c$, $r_i=0,5T_c$, $r_d=0,125T_c$.

Με k_c την κρίσιμη απολαβή και T_c τη κρίσιμη περίοδο που μπορούμε να τα υπολογίσουμε από το γεωμετρικό τόπο ριζών για την εν λόγω διαδικασία, ή από τη βηματική απόκριση αυξάνοντας την ενίσχυση αν είναι δυνατόν χωρίς να

καταστρέψουμε το σύστημα λόγω της υπερβολικής ενίσχυσης ($k=k_c$).

Για τον εμπειρικό προσδιορισμό των παραμέτρων ενός ελεγκτή τριών όρων υπάρχει πληθώρα εργασιών ανάλογα με το είδος της διαδικασίας που έχουμε. Με τον εμπειρικό προσδιορισμό επιτυγχάνουμε προσδιορισμό των παραμέτρων για γενικές απαιτήσεις (μικρή υπερύψωση, μικρό χρόνο ανόδου, μικρό χρόνο αποκατάστασης, κ.τ.λ) και όχι συγκεκριμένες (η υπερύψωση να είναι δεδομένη, ο χρόνος ανόδου να είναι δεδομένος, ο χρόνος αποκατάστασης να είναι δεδομένος, κ.τ.λ)

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ Γ.ΤΟΠΟΥ

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να μελετήσει ο σπουδαστής τον προσδιορισμό των παραμέτρων εν πρώτοις ενός P, P.D ελεγκτή και κατά δεύτερο ενός αντισταθμητή προήγησης φάσης, με τη βοήθεια του Γεωμετρικού τόπου ριζών, ώστε το κλειστό σύστημα να ικανοποιεί επιθυμητές προδιαγραφές.

Θα ασχοληθούμε με τη βελτίωση κλειστών συστημάτων εισάγοντας ελεγκτή ή αντισταθμητή στον απ' ευθείας κλάδο. Προφανώς εδώ η αντιστάθμιση περιορίζεται στο σχεδιασμό ενός φίλτρου, που σκοπό έχει να φιλτράρει το σφάλμα του συστήματος και να μας δώσει σήμα κατάλληλο στον ενεργοποιητή της διαδικασίας. Το φιλτράρισμα αυτό έχει σκοπό να αποκόψει τα ανεπιθύμητα και ανεπηρέαστα χαρακτηριστικά του συστήματος. Θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς της διαδικασίας είναι γνωστή και θα προσπαθήσουμε να ελέγξουμε το όλο σύστημα ώστε να επιτύχουμε συγκεκριμένες επιθυμητές προδιαγραφές. Θα χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς από την προηγούμενη παράγραφο P.I.D ελεγκτές και τους αντισταθμητές προήγησης ή καθυστέρησης φάσης (για την διευκόλυνση του αναγνώστη θα γίνεται διαχωρισμός μεταξύ ελεγκτού και αντισταθμητή).

Αφού θα εργαστούμε στο πεδίο του χρόνου είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε μεθοδολογίες που σχετίζονται ως επί το πλείστον με τη βηματική απόκριση που προκύπτουν από τη μελέτη του Γεωμετρικού Τόπου Ριζών. Ως γνωστό ο Γεωμετρικός Τόπος Ριζών είναι το γράφημα των πόλων του κλειστού συστήματος καθώς μεταβάλλεται η απολαβή K του ανοικτού βρόχου.

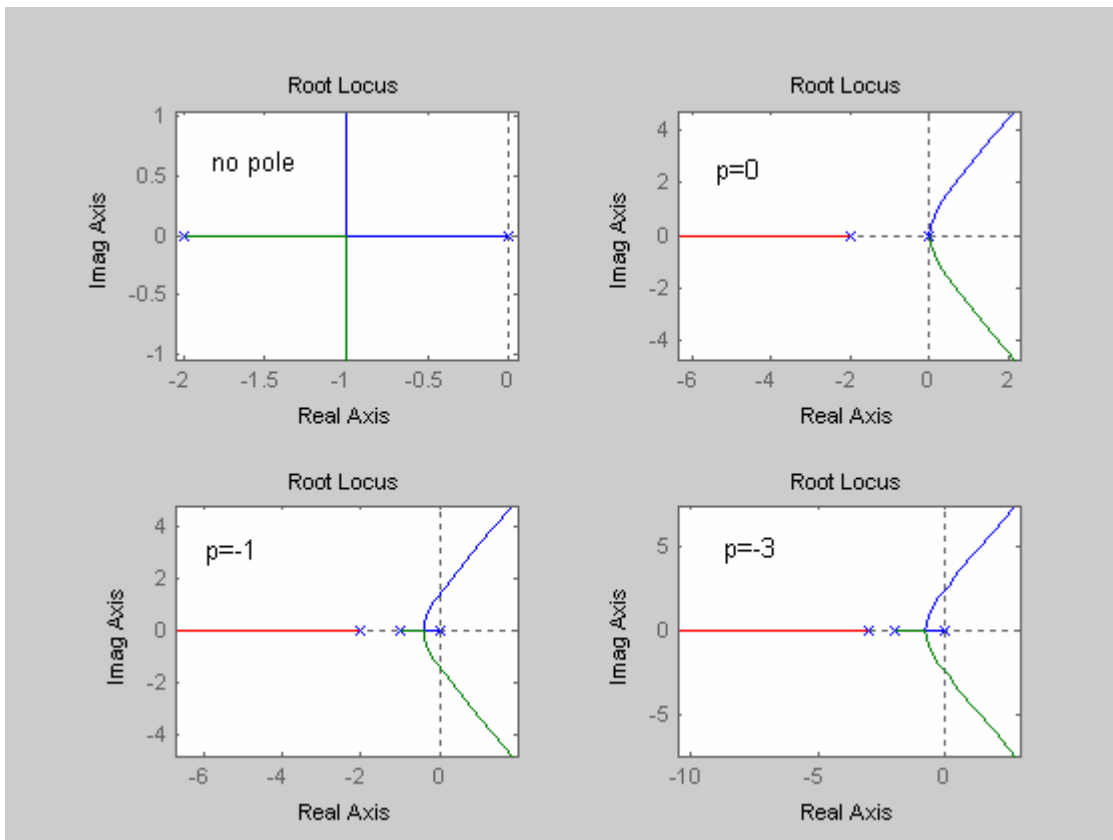
Ο προσδιορισμός των αντισταθμητών με βάση τον Γεωμετρικό Τόπο Ριζών είναι μία γραφική μέθοδος και σκοπό έχει να προσδιορίσει το μηδενικό και τον πόλο του αντισταθμητή ώστε το κλειστό σύστημα να έχει επιθυμητές προδιαγραφές. Όπως είναι γνωστό από τη μελέτη του Γεωμετρικού Τόπου ενός συστήματος γνωρίζουμε ότι η οποιαδήποτε επιθυμητή προδιαγραφή (π.χ συγκεκριμένος επιθυμητός πόλος) δεν δύναται να επιτευχθεί με ρύθμιση μόνο της απολαβής K . Πράγματι αν αυξάνουμε την απολαβή του ανοικτού συστήματος, οι πόλοι του κλειστού συστήματος

βρίσκονται σε προκαθορισμένες θέσεις και συγκεκριμένα διαγράφουν το Γεωμετρικό Τόπο Ριζών. Προκύπτει λοιπόν η ανάγκη να διασκευάσουμε τον Τόπο ώστε να περνά από συγκεκριμένα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο που προσδίδουν επιθυμητά χαρακτηριστικά στο σύστημα. Η διασκευή του Γ.Τόπου ώστε να διέρχεται από επιθυμητά σημεία είναι το λογικό επακόλουθο της προσθήκης πόλων και μηδενικών υπό μορφή νέου συστήματος (του ελεγκτή) σε σειρά με το αρχικό σύστημα ανοικτού βρόχου. Ο προσδιορισμός των πόλων και μηδενικών των αντισταθμητών είναι θέμα διερεύνησης στη παρούσα άσκηση.

Πριν προχωρήσουμε στο σχεδιασμό των ελεγκτών ή αντισταθμητών κρίνεται σκόπιμο να υπενθυμίσουμε τα εξής.

- **Επίδραση στο Γεωμετρικό Τόπο η προσθήκη πόλου.** Η προσθήκη ενός πόλου στη συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού βρόχου ενός κλειστού συστήματος έχει σαν αποτέλεσμα ο Γεωμετρικός Τόπος να μετατίθεται προς τα δεξιά, τείνει να μειώσει τη σχετική ευστάθεια του συστήματος και κάνει το σύστημα να αποκρίνεται με αργότερο ρυθμό. Ας θυμηθούμε επίσης ότι η προσθήκη του I (μόνο όρο ολοκληρώματος) ελεγκτή προσθέτει πόλο στην αρχή των αξόνων κάνοντας το σύστημα λιγότερο ευσταθές.

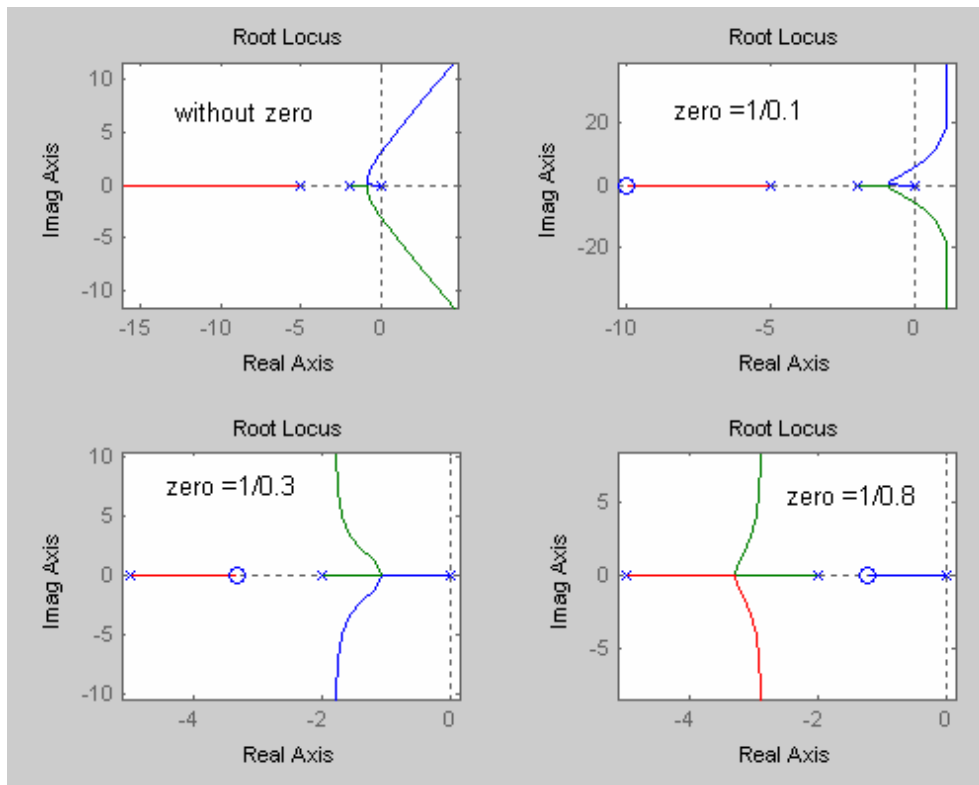
Αν πάρουμε το σύστημα με $GF(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+p)}$ σαν αρχικό χωρίς μηδενικό στον αριθμητή και στην συνέχεια θεωρήσουμε το σύστημα μας ότι έχει σαν πόλο p διαδοχικά τα 0, -1 -3 προκύπτουν οι αντίστοιχοι Γ. Τόποι



- **Επίδραση στο Γεωμετρικό Τόπο η προσθήκη μηδενικού.** Η προσθήκη ενός μηδενικού στη συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού βρόχου ενός κλειστού συστήματος έχει σαν αποτέλεσμα ο Γεωμετρικός Τόπος να μετατίθεται προς τα αριστερά, τείνει να αυξήσει τη σχετική ευστάθεια του συστήματος και κάνει το σύστημα να αποκρίνεται με γρηγορότερο ρυθμό. Ας θυμηθούμε επίσης ότι η προσθήκη του D (μόνο όρο παραγώγου) ελεγκτή προσθέτει μηδενικό δημιουργώντας κάποιο βαθμό πρόβλεψης σφάλματος που τελικά κάνει το σύστημα ταχύτερο.

Αν πάρουμε το σύστημα με $GF(s) = \frac{k}{s(1+.2s)(1+0.5s)}$ σαν αρχικό χωρίς μηδενικό στον αριθμητή και στην συνέχεια

θεωρήσουμε το σύστημα μας ότι έχει σαν μηδενικό διαδοχικά τα 1/0.1, 1/0.2, 1/0.8 προκύπτουν οι αντίστοιχοι Γ. Τόποι



Το ερώτημα που προκύπτει είναι πότε χρειάζεται διασκευή ο Γεωμετρικός Τόπος και με ποίο τρόπο επιτυγχάνεται;

1. Η μεταβατική συμπεριφορά του κλειστού συστήματος είναι ικανοποιητική, αλλά το μόνιμο σφάλμα είναι πολύ μεγάλο. Για να μειώσουμε το μόνιμο σφάλμα χρειάζεται αύξηση της απολαβής χωρίς όμως να μειώσουμε τη σχετική ευστάθεια σε πολύ μικρά επίπεδα.

2. Το σύστημα είναι ευσταθές αλλά η μεταβατική απόκριση δεν είναι ικανοποιητική. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να μεταθέσουμε τον Γεωμετρικό Τόπο αριστερότερα, να τον απομακρύνουμε δηλαδή από τον φανταστικό άξονα.

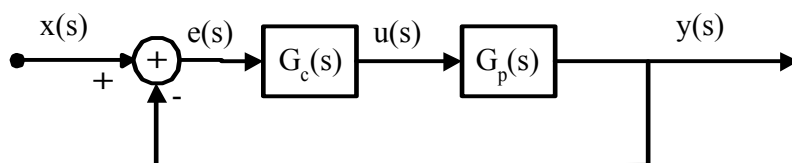
3. Το σύστημα είναι ευσταθές, αλλά η μεταβατική και η μόνιμη συμπεριφορά του δεν είναι ικανοποιητική. Θα πρέπει λοιπόν ο Γεωμετρικός Τόπος να μετατεθεί προς τα αριστερά και να αυξήσουμε την απολαβή.

4. Το σύστημα είναι ασταθές για όλες τις τιμές της απολαβής. Θα πρέπει λοιπόν να διασκεύασουμε το Γεωμετρικό Τόπο ώστε τμήμα του κάθε κλάδου του να βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο με σκοπό να έχουμε τουλάχιστον υπό συνθήκη ευσταθές σύστημα

Εάν η επιθυμητή απόκριση είναι υποκρίσιμη, επιλέγουμε την απολαβή του ανοικτού συστήματος τέτοια ώστε να έχουμε δύο μιγαδικούς επικρατούντες πόλους και τους άλλους να βρίσκονται αριστερότερα και σε αρκετή απόσταση από τους επικρατούντες. Με αυτό τον τρόπο ουσιαστικά εκμηδενίζεται η συνεισφορά των και κυριαρχεί η συνεισφορά των επικρατούντων πόλων.

Ο P.D ελεγκτής και ο αντισταθμητής προήγησης φάσης, είναι ουσιαστικά ένας αντισταθμητής σειράς αφού επεμβαίνει στον απ' ευθείας κλάδο του κλειστού συστήματος και ρυθμίζει το σήμα $u(s)$ που οδηγεί τον ενεργοποιητή σε ένα σύστημα λαμβάνοντας υπ' όψη την απόκλιση(σφάλμα) $e(s)$ της εισόδου από την έξοδο.

Το κλειστό σύστημα με μοναδιαία αρνητική ανάδραση έχει την παρακάτω δομή.



Η συνάρτηση μεταφοράς της υπό έλεγχο διαδικασίας είναι $G_p(s)$, η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή είναι η $G_c(s)$. Γενικά ισχύει

$$y(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} x(s) = H_y(s) x(s)$$

$$e(s) = \frac{1}{1 + G_c G_p} x(s) = H_e(s) x(s), \quad u(s) = \frac{G_p}{1 + G_c G_p} x(s) = H_u(s) x(s)$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς του P.D ελεγκτή έχουμε ότι

$$G_c(s) = k_p + k_d s = k_p [1 + r_d s]$$

k_p = Σταθερά δράσης ανάλογου ελέγχου, έχει σχέση με την απολαβή του ανοικτού βρόχου.

k_d = Σταθερά δράσης ελέγχου παραγώγου

Για τον αντισταθμητή προήγησης έχουμε ότι

$$G_c(s) = \frac{s + \mu}{s + \pi} = \frac{1}{\lambda} \frac{1 + \lambda T s}{1 + T s} \quad \text{με } \mu < \pi, \text{ επειδή το μηδενικό } -\mu \text{ είναι } \underline{\text{μεγαλύτερο}} \text{ του πόλου } -\pi \text{ γιατί έχουμε και την}$$

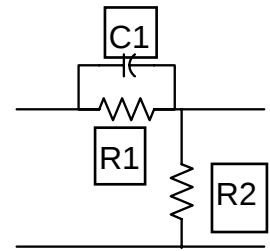
ονομασία αντισταθμητής προήγησης φάσης.

Συνήθως για τον υλοποίηση του αντισταθμητή προήγησης χρησιμοποιείται παθητικό δικτύωμα με αντιστάσεις και πυκνωτές, οπότε χρησιμοποιούμε την μορφή

$$G_c(s) = \frac{1}{\lambda} \frac{1 + \lambda T s}{1 + T s} \quad \text{με το αντίστοιχο δίκτυωμα που απεικονίζεται δίπλα και}$$

$$\lambda = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \quad T = \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}. \quad \text{Παρατηρούμε ότι το δίκτυωμα λόγω κατασκευής εισάγει}$$

εξασθένιση $1/\lambda$, οπότε στην υλοποίηση ακολουθείται από ενισχυτή με απολαβή A για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης απολαβής. Για τον αντισταθμητή προήγησης φάσης έχουμε ότι εισάγει ένα μηδενικό στο σημείο $-1/\lambda T$ και πόλο στο σημείο $-1/T$. Υπενθυμίζουμε ότι ο αντισταθμητής προήγησης φάσης είναι στην ουσία P.D ελεγκτής με φίλτρο.



Αντιστάθμιση με Ανάλογο Ελεγγο

Είναι γνωστό από τα προηγούμενα ότι ο ανάλογος έλεγχος K_p είναι στην ουσία καθαρός έλεγχος απολαβής. Με την αύξηση της απολαβής μπορούμε να επιτύχουμε μείωση του μόνιμου σφάλματος, αλλά χειροτερεύει η μεταβατική συμπεριφορά. Καθώς αυξάνεται το K κινούνται οι πόλοι του κλειστού συστήματος και κατά κανόνα οδεύουν προς τον φανταστικό άξονα με συνέπεια να αυξάνονται η ιδιοσυχνότητα ω_n και η ιδοσυχνότητα με απόσβεση ω_d του συστήματος και να μειώνεται ο συντελεστής απόσβεσης ζ . Μπορούμε λοιπόν να προσδιορίσουμε επί του Γεωμετρικού Τόπου πόλους με συγκεκριμένες προδιαγραφές μόνιμου σφάλματος και μεταβατικής συμπεριφοράς.

Ο τρόπος υπολογισμού της απαιτούμενης απολαβής για τις απαιτούμενες προδιαγραφές φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα. Δίνεται το κλειστό σύστημα με μοναδιαία αρνητική ανάδραση και συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$\text{την } G(s) = \frac{K}{s(s+2)}. \text{ Ζητείται να υπολογιστεί η τιμή του ανάλογου ελέγχου ώστε το κλειστό σύστημα να έχει επικρατούντες}$$

πόλους με συντελεστή απόσβεσης $\zeta=0,45$.

• Αλγεβρικός Τρόπος.

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος δίνεται από την

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Εξισώνοντας τους παρανομαστές και έχοντας ότι $\zeta=0,45$ προκύπτει ότι $K=4,988$. Οπότε έχουμε ότι ο απαιτούμενος ανάλογος έλεγχος για να επιτύχουμε την προδιαγραφή $\zeta=0,45$ είναι $K_p=4,988$. Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο αλγεβρικός

τρόπος χρησιμοποιήθηκε επειδή το προκύπτον κλειστό σύστημα είναι καθαρό δευτεροβάθμιο και υπάρχει ευχέρεια στις πράξεις.

- **Γεωμετρικός Τρόπος** (Χρησιμοποιείται συνήθως όταν το κλειστό σύστημα είναι βαθμού ανώτερου του δευτέρου).

Σχεδιάζουμε κατά πρώτο το Γεωμετρικό τόπο του συστήματος. Σχεδιάζουμε την ευθεία $\zeta=0.45$ (είναι ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία $\varphi=\cos^{-1}\zeta$ με τον αρνητικό ημιάξονα) και προσδιορίζουμε το σημείο που τέμνει τον Τόπο. Από το διάγραμμα προσδιορίζουμε το σημείο $-1+1.985j$ που αντιπροσωπεύει τον επικρατούντα πόλο με το επιθυμητό ζ . Μας ενδιαφέρει όμως να υπολογίσουμε και την τιμή της απολαβής K_0 (στατική ακρίβεια) για την οποία οι πόλοι του κλειστού συστήματος βρίσκονται στο εν λόγω σημείο. Από την συνθήκη του μέτρου

$$\left| \frac{K_0}{s(s+2)} \right|_{s=-1+1.985j} = 1. \text{ Εκτελώντας τους υπολογισμούς έχουμε ότι } K_0=4.938.$$

Αντιστάθμιση με Ανάλογο Ελεγγο+Ελεγγο Παραγώγου

Παράδειγμα. Δίνεται το κλειστό σύστημα με μοναδιαία αρνητική ανάδραση και συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου την

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}. \text{ Ζητείται να υπολογιστεί η τιμή του ανάλογου ελέγχου ώστε το κλειστό σύστημα να έχει επικρατούντα πόλο το } s_0=-4+j8.$$

- **Αλγεβρικός Τρόπος.**

Αφού επιθυμούμε το κλειστό σύστημα να έχει πόλο το $s_0=-4+j8$ θα πρέπει το εν λόγω σημείο να ικανοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση, θα πρέπει συνεπώς να έχουμε $p(s_0)=0$ από την οποία προκύπτει ότι

$$\left[K_p + K_d s \right] \frac{1}{s(s+2)} + 1 = 0$$

για $s=-4+j8$. Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$\left[K_p + K_d (-4 + j8) \right] \frac{1}{-56-48j} + 1 = 0$$

Επιλύοντας ως προς το πραγματικό και ως προς το φανταστικό μέρος έχουμε ότι $K_p-4K_d-56=0$ και $8K_d-48=0$. Τελικά προκύπτει ότι $K_d=6$ και $K_p=80$. Συνεπώς ο ελεγκτής έχει την μορφή $G_c(s)=80+6s$.

- **Γεωμετρικός Τρόπος** (Χρησιμοποιείται συνήθως όταν το κλειστό σύστημα είναι βαθμού ανώτερου του δευτέρου)

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το δοθέν σύστημα, σημειώνουμε επίσης επί του διαγράμματος και τον επιθυμητό επικρατούντα πόλο s_0 . Για να είναι το σημείο s_0 πόλος του κλειστού θα πρέπει ο Γεωμετρικός Τόπος του συστήματος μετά την τοποθέτηση του ελεγκτή να διέρχεται από το εν λόγω σημείο. Θα πρέπει τότε να ικανοποιείται η συνθήκη της φάσης και του μέτρου. Έχουμε συνεπώς για την συνθήκη της φάσης ότι $\angle G_c(s_0)G(s_0) = -180^\circ$ ή $\angle G_c(s_0) + \angle G(s_0) = -180^\circ$.

Όμως για τη φάση του αρχικού συστήματος έχουμε ότι $\angle G(s_0) = -220.601^\circ$ (είτε αριθμητικά είτε γεωμετρικά). Προκύπτει λοιπόν ότι ο ελεγκτής θα πρέπει να προσφέρει 40.601° . Οπότε έχουμε ότι

$$\angle(K_p + K_d s)_{s_0} = \angle(K_p - 4K_d + j8K_d)_{s_0} = \tan^{-1} \left(\frac{8K_d}{K_p - 4K_d} \right) = 40.601^\circ.$$

Επιλύοντας την έχουμε ότι $K_p=13.336K_d$. Από την συνθήκη του μέτρου έχουμε ότι

$$\left| \left[K_p + K_d s \right] \frac{1}{s(s+2)} \right|_{s=-4+j8} = 1, \quad \left| \left[K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right) \right] \frac{1}{s(s+2)} \right|_{s=-4+j8} = 1,$$

$$\left| \left[K_p (1 + .075s) \right] \frac{1}{s(s+2)} \right|_{s=-4+j8} = 1, \quad \left| \left[K_p [1 + .075(-4 + j8)] \right] \frac{1}{-56 - j48} \right|_{s=-4+j8} = 1$$

Τελικά προκύπτει ότι $K_p \cdot 0.922 = 73.756$ οπότε $K_p = 79.996$ και $K_d = 5.998$

Αντιστάθμιση προήγησης φάσης

Η μεθοδολογία σχεδιασμού αντισταθμιτή προήγησης φάσης γίνεται ως επί το πλείστον με βάση τον Γ. Τόπο, είναι μία πολύ χρήσιμη και σχετικά εύκολη διαδικασία όταν οι προδιαγραφές του συστήματος δίνονται σε προδιαγραφές απόκρισης όπως συντελεστής απόσβεσης ζ, φυσική συχνότητα με απόσβεση για τους επικρατούντες πόλους του κλειστού συστήματος, μέγιστη υπερψύωση, χρόνος ανόδου, χρόνος αποκατάστασης, κ.τ.λ. Δηλαδή εν κατακλείδι δίνεται ο επικρατούν πόλος του συστήματος.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που το προς μελέτη σύστημα είναι ασταθές για όλες τις τιμές της απολαβής ή δεν έχει τις επιθυμητές προδιαγραφές. Τότε είμαστε αναγκασμένοι να τροποποιήσουμε το γράφημα του Γεωμετρικού Τόπου στην περιοχή της αρχής των αξόνων και ειδικά στην περιοχή του φανταστικού άξονα ώστε οι επικρατούντες πόλοι να βρίσκονται σε επιθυμητές θέσεις στο μιγαδικό επίπεδο. Το πρόβλημα λύνεται με την προσθήκη πόλων ή μηδενικών στο αρχικό σύστημα ανοικτού βρόχου με την χρήση αντισταθμιτών (φίλτρων) σε σειρά με το αρχικό σύστημα.

Όταν η μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος δεν είναι ικανοποιητική το αντισταθμίζουμε με αντισταθμιτή προήγησης. Γενικά εκλέγουμε το μηδενικό του αντισταθμιτή στο μεγαλύτερο πραγματικό πόλο (εκτός εκείνου στην αρχή) και βελτιώνεται κατά πολύ η απόκριση. Αν το σύστημα είναι τύπου 0 τοποθετούμε το μηδενικό του αντισταθμιτή στην θέση του δεύτερου μεγαλύτερου πραγματικού πόλου. Αν θέλουμε συγκεκριμένες προδιαγραφές μεταβατικής κατάστασης προσδιορίζουμε τους πόλους του ενεργού δευτεροβάθμιου συστήματος με τις επιθυμητές προδιαγραφές (καθορίζουμε τους επικρατούντες πόλους) και απαιτούμε ο Γεωμετρικός Τόπος ριζών να περνά από τους επιθυμητούς πόλους.

Αλγεβρικός υπολογισμός του αντισταθμιτή προήγησης φάσης

- Από τις επιθυμητές προδιαγραφές προσδιορίζουμε την επιθυμητή θέση των επικρατούντων πόλων του κλειστού συστήματος.

- Υποθέτουμε ότι ο αντισταθμιτής προήγησης είναι της μορφής

$$G_c(s) = \frac{1}{\lambda} \frac{1 + \lambda Ts}{1 + Ts} = \frac{s + \mu}{s + \pi} = \frac{\mu}{\pi} \frac{1 + r_\mu s}{1 + r_\pi s}$$

με $\lambda \leq 10$ συνήθως, και ακολουθείται από ενισχυτή με απολαβή A για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης απολαβής.

- Με βάση τον επικρατούντα επιθυμητό πόλο s_0 απαιτούμε για το χαρακτηριστικό πολώνυμο να ισχύει $1 + G_c(s_0)G_p(s_0) = 0$

οπότε έχουμε, από την τελευταία μιγαδική σχέση εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη έχουμε δύο σχέσεις με δύο αγνώστους τα r_π και r_μ

- Προσδιορίζουμε την απολαβή του ανοικτού βρόχου έχοντας υπολογίσει τη στατική ακρίβεια στον επιθυμητό πόλο.

Προφανώς μετά τον σχεδιασμό του αντισταθμιτή θα πρέπει να ελέγξουμε αν ικανοποιούνται οι επιθυμητές προδιαγραφές. Αν δεν ικανοποιούνται επαναλαμβάνουμε την διαδικασία σχεδιασμού τροποποιώντας την θέση του πόλου και του μηδενικού του αντισταθμιτή. Αν κατά την πορεία σχεδιασμού προκύψει ότι απαιτείται σταθερά σφάλματος μόνιμης κατάστασης με μεγάλη τιμή, τότε χρειάζεται και ένας επιπλέον αντισταθμιτής καθυστέρησης φάσης σε σειρά με τον προϋπολογισθέντα αντισταθμιτή προήγησης φάσης.

Παράδειγμα. Δίνεται το κλειστό σύστημα με μοναδιαία αρνητική ανάδραση και συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$\text{την } G(s) = \frac{K}{s(s+2)}. \text{ Ζητείται να υπολογιστεί η τιμή του ανάλογου ελέγχου ώστε το κλειστό σύστημα να έχει επικρατούντα}$$

πόλο το $s_0 = -4 + j8$.

Αλγεβρικός υπολογισμός

Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να σχεδιάσουμε αντισταθμιτή προήγησης φάσης με σταθερή απολαβή ανοικτού βρόχου $K_0 = 5$. Τότε για τον επικρατούντα πόλο θα έχουμε ότι

$$G_c(s) \frac{1}{s(s+2)} + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad G_c(s) = -s(s+2), \text{ με } G_c(s) = 56 + j48.$$

Όμως έχουμε ότι $G_c(s) = 5 \frac{1+r_\mu s}{1+r_\pi s}$. Τελικά $r_\mu = 2.1856$ και $r_\pi = 0.154$, οπότε $\mu = -0.454$ και $\pi = -6.4945$ και $\lambda = 14.9$

(πηλίκο του μέτρου πόλου προς το μέτρο του μηδενικού). Η χαρακτηριστική εξίσωση του αντισταθμισμένου συστήματος $p(s) = 1 + G_c(s)G(s) = 0$ δίνει ρίζες στα $s = -0.4$, $s = -4.05 + j8.021$. Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα θεωρούμε την αντιστάθμιση επιτυχή. Αν όμως δεν προέκυπταν αρνητικοί αριθμοί το μηδενικό και ο πόλος του συστήματος ή το λ ήταν αριθμός πολύ μεγάλος θα έπρεπε να ξαναπροσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε τον αντισταθμητή αλλάζοντας το K_0 ή τοποθετώντας διπλό ή πολλαπλό αντισταθμητή.

• Γεωμετρικός υπολογισμός

• Από τις επιθυμητές προδιαγραφές προσδιορίζουμε την επιθυμητή θέση των επικρατούντων πόλων του κλειστού συστήματος.

• Σχεδιάζουμε το διάγραμμα του Γεωμετρικού Τόπου και ελέγχουμε αν οι επιθυμητοί πόλοι του συστήματος βρίσκονται επί του γραφήματος. Αν όντως βρίσκονται, με ρύθμιση της απολαβής είναι δυνατό να έχουμε τις επιθυμητές προδιαγραφές, προς τούτο υπολογίζουμε την στατική ακρίβεια στον εν λόγω πόλο και έτσι έχουμε το μέτρο της απολαβής. Αν οι επιθυμητοί επικρατούντες πόλοι δεν βρίσκονται επί του Τόπου τότε υπολογίζουμε τη φάση της συνάρτησης μεταφοράς του ανοικτού βρόχου στον επιθυμητό επικρατούντα πόλο. Υπολογίζουμε την υπολειπόμενη γωνία ϕ που απαιτείται ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της φάσης. ($\angle G_c G(s_0) = -180^\circ$) Τη διαφορά φάσης θα την προσφέρει ο αντισταθμητής προήγησης αν ο Γεωμετρικός Τόπος διασκευαστεί και περάσει από τους επιθυμητούς επικρατούντες πόλους

• Υποθέτουμε ότι ο αντισταθμητής προήγησης είναι της μορφής

$$G_c(s) = \frac{1}{\lambda} \frac{1 + \lambda Ts}{1 + Ts} = \frac{s + \mu}{s + \pi} = \frac{\mu}{\pi} \frac{1 + r_\mu s}{1 + r_\pi s}$$

και ακολουθείται από ενισχυτή με απολαβή A για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης απολαβής.

• Αν δεν επιβάλλεται κάποιος περιορισμός για το σφάλμα μόνιμης κατάστασης προσδιορίζουμε τη θέση του μηδενικού και του πόλου για τον αντισταθμητή ώστε να συνεισφέρουν στην φάση του όλου συστήματος την υπολειπόμενη γωνία ϕ . Αν δεν υπάρχει καμία άλλη απαίτηση τότε σχηματίζουμε όσο πιο μικρό λ μπορούμε, συνήθως $\lambda \leq 10 \sim 15$, που έχει σαν αποτέλεσμα μεγάλη τιμή για το K , πράγμα επιθυμητό.

• Προσδιορίζουμε την απολαβή του ανοικτού βρόχου έχοντας υπολογίσει τη στατική ακρίβεια στον επιθυμητό πόλο.

Προφανώς μετά τον σχεδιασμό του αντισταθμητή θα πρέπει να ελέγξουμε αν ικανοποιούνται οι επιθυμητές προδιαγραφές. Αν δεν ικανοποιούνται επαναλαμβάνουμε την διαδικασία σχεδιασμού τροποποιώντας την θέση του πόλου και του μηδενικού του αντισταθμητή. Αν κατά την πορεία σχεδιασμού προκύψει ότι απαιτείται σταθερά σφάλματος μόνιμης κατάστασης με μεγάλη τιμή, τότε χρειάζεται και ένας επιπλέον αντισταθμητής καθυστέρησης φάσης σε σειρά με τον προϋπολογισθέντα αντισταθμητή προήγησης φάσης.

Για τον υπολογισμό της ακριβούς θέσης του μηδενικού και του πόλου συνήθως χρησιμοποιούνται οι παρακάτω μεθοδολογίες

• Μεθοδολογία Dorf

Δίνεται το κλειστό σύστημα με μοναδιαία αρνητική ανάδραση και συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου την

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}. \text{ Ζητείται να υπολογιστεί η τιμή του ανάλογου ελέγχου ώστε το κλειστό σύστημα να έχει επικρατούντα}$$

πόλο το $s_0 = -4 + j8$.

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το δοθέν σύστημα, σημειώνουμε επίσης επί του διαγράμματος και τον επιθυμητό επικρατούντα πόλο s_0 . Για να είναι το σημείο s_0 πόλος του κλειστού θα πρέπει ο Γεωμετρικός Τόπος του συστήματος μετά την τοποθέτηση του ελεγκτή να διέρχεται από το εν λόγω σημείο. Θα πρέπει τότε να ικανοποιείται η συνθήκη της φάσης και του μέτρου. Έχουμε συνεπώς για την συνθήκη της φάσης ότι $\angle G_c(s_0)G(s_0) = -180^\circ$ ή $\angle G_c(s_0) + \angle G(s_0) = -180^\circ$. Όμως για τη φάση του αρχικού συστήματος έχουμε ότι $\angle G(s_0) = -220.601^\circ$ (είτε αριθμητικά είτε γεωμετρικά). Προκύπτει λοιπόν ότι ο αντισταθμητής θα πρέπει να

προσφέρει 40,6010. Οπότε έχουμε ότι $\angle G_c(s_0) = \angle \frac{s_0 + \mu}{s_0 + \pi} = -40.601^\circ$. Σύμφωνα με την μεθοδολογία Dorf επιλέγουμε

το μηδενικό του αντισταθμητή κάτω ακριβώς από τον επικρατούντα πόλο και προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του πόλου για τον αντισταθμητή προήγησης.

Τότε όμως $\mu = -4$ και $\angle G_c(s_0) = \angle(s_0 + \mu) - \angle(s_0 + \pi) = 90^\circ - \angle(s_0 + \pi) = 40.601^\circ$ οπότε προκύπτει ότι $\pi = -10.857$, οπότε $\lambda = 2.717$. Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου του αντισταθμισμένου συστήματος δίνεται από την

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_0(s+4)}{(s+10.8572)} \frac{1}{s(s+2)}$$

Για τον προσδιορισμό της κατάλληλης ενίσχυσης K_0 που χρειαζόμαστε για να περνά ο Γεωμετρικός Τόπος του αντισταθμισμένου από τον επιθυμητό επικρατούντα πόλο θα χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη του μέτρου.

Πράγματι

$$\|G_c(s_0)G(s_0)\| = \left\| \frac{K_0(s_0 + 4)}{(s_0 + 10.8572)} \frac{1}{s_0(s_0 + 2)} \right\| = 1 \text{ οπότε } K_0 = 97.142.$$

Τελικά λοιπόν έχουμε για την συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου του αντισταθμισμένου συστήματος ότι

$$G_c(s)G(s) = \frac{97.142(s+4)}{(s+10.8572)} \frac{1}{s(s+2)}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του αντισταθμισμένου συστήματος $p(s) = 1 + G_c(s)G(s) = 0$ δίνει ρίζες στο $s = -4.857$, $s = -3.999 + j8.000$. Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα θεωρούμε την αντιστάθμιση επιτυχή. Αν όμως είχε προκύψει ότι ο αντισταθμητής έπρεπε να προσφέρει αρνητική γωνία επειδή αυτό δεν είναι εφικτό θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε διπλό ή και πολλαπλό αντισταθμητή προήγησης φάσης. Για κατασκευαστικούς λόγους απαιτούμε $\lambda \leq 10 \sim 15$, αν δεν ικανοποιείται η παραπάνω απαίτηση τότε χρησιμοποιούμε διπλό ή και πολλαπλό αντισταθμητή προήγησης φάσης.

Βέβαια μπορεί ο αναγνώστης να τοποθετήσει ο ίδιος σε ποια θέση επιθυμεί το μηδενικό του αντισταθμητή και στην συνέχεια με το κριτήριο της φάσης να προσδιορίσει τη θέση του πόλου. Είναι όμως πιθανόν με αυτή την επιλογή του να απαιτείται κατασκευή δικτύωματος με πάρα πολύ μεγάλες τιμές των αντιστάσεων και των πυκνωτών που ίσως να μην κατασκευάζεται ο αντισταθμητής.

Στη βιβλιογραφία μπορεί ο αναγνώστης να βρει πληθώρα άλλων μεθοδολογιών με πιο διαδεδομένες τις

- Μεθοδολογία Διχοτόμου
- Μεθοδολογία προκαθορισμένης γωνίας
- Μεθοδολογία Del Toro

Σχεδιασμός P.I.D ελεγκτή.

Ο P.I.D ελεγκτής χρησιμοποιείται όταν δεν έχουμε ικανοποιητική μόνιμη και μεταβατική κατάσταση για κάποιο σύστημα. Στο σημείο αυτό θα αναπτύξουμε μια μικτή αλγεβρική και γεωμετρική μέθοδο υπολογισμού των παραμέτρων μέσω από ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα. Δίνεται κλειστό σύστημα με μοναδιαία αρνητική ανάδραση και συνάρτηση μεταφοράς για τον απ' ευθείας κλάδο την $G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$. Να σχεδιαστεί P.I.D ελεγκτής ώστε το νέο κλειστό σύστημα

να έχει σφάλμα μόνιμης κατάστασης 10% για συνάρτηση επιτάχυνσης, υπερύψωση 10% και χρόνο αποκατάστασης 2sec.

Λύση. Το αρχικό σύστημα είναι σύστημα τύπου 1 οπότε θα έχουμε σφάλμα ταχύτητας $e_v = \frac{1}{k_v}$ με

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{400}{200} = 2 \quad \text{άρα} \quad e_v = \frac{1}{2} = 0.5. \quad \text{Η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή θα είναι}$$

$G_c(s) = k_p(1 + r_d s + 1/r_i s)$, το τελικό σύστημα με τον ελεγκτή θα είναι σύστημα τύπου 2 οπότε θα έχουμε σφάλμα μόνιμης κατάστασης το

$e_v = 1/k_{ep}$ με $k_{ep} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) G_c(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)} \cdot k_p (1 + r_d s + 1/r_i s) = 2 \frac{k_p}{r_i}$, οπότε θα πρέπει σύμφωνα με

τις απαιτήσεις του προβλήματος να έχουμε $2 \frac{k_p}{r_i} = \frac{1}{0.1}$, δηλαδή $k_p = 5r_i$. Για το σύστημα μας όμως δίνεται

απαίτηση για υπερύψωση και για χρόνο αποκατάστασης. Γνωρίζουμε όμως ότι $h = \exp(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}) = 0.1$, με

$\cos\phi = \zeta$ και , οπότε $\ln(0.1)/\pi = -\zeta \tan\phi$ με $-0.733 = -1/\tan\phi$, οπότε $\tan\phi = 1.364$ με $\phi = 53.759^\circ$ και

$\cos\phi = \zeta = 0.591$. Από την απαίτηση του χρόνου αποκατάστασης έχουμε $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ για 2% οπότε ω_n

$= 3.384$. Για τον επικρατούντα πόλο έχουμε ότι $s_0 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1.997 \pm j2.73 \approx -2 \pm j2.73$. Οι πόλοι του νέου κλειστού συστήματος προκύπτουν από την εξίσωση $p(s) = 1 + G(s)G_c(s) = 0$
 $p(s) = (s^3 + 30s^2 + 200s)r_i s + 400k_p(r_i s + r_i r_d s^2 + 1) = 0$

$p(s) = (s^4 + 30s^3 + (200 + 400k_p r_d)s^2 + 400k_p s + 400k_p / r_i) = 0$. Για την επίλυση του προβλήματος μας έχουμε τις δύο σχέσεις. Όμως επειδή $k_p = 5r_i$ έχουμε ότι

$p(s) = (s^4 + 30s^3 + (200 + 400k_p r_d)s^2 + 400k_p s + 2000) = 0$. την εξίσωση αυτή πρέπει να την επαληθεύει ο επικρατούν πόλος $s_0 \approx -2 \pm j2.73$. Τελικά προκύπτουν δύο εξισώσεις οι $\text{Real}(p(s))=0$, $\text{Imag}(p(s))=0$ με δύο αγνώστους το k_p και r_d .